

RÉDIGER DES MATHÉMATIQUES

GABRIEL PALLIER

TABLE DES MATIÈRES

1. Épreuve écrite 2013-1 , Problème 2	1
2. Épreuve écrite 2016-1 , Problème 1	9
3. Épreuve écrite 2017-1 , Problème 2	24
4. Épreuve écrite 2018-2 , Problème 2	29
5. Épreuve écrite 2021-1	43
6. Épreuve écrite 2021-2 , Problème 1	59
7. Épreuve écrite 2021-2 , Problème 2	65
Programme spécifique de la première épreuve écrite	69
Index	71

1. ÉPREUVE ÉCRITE **2013-1**, PROBLÈME 2

Énoncé. L'énoncé contextualisé se trouve à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/EP1_2013.pdf.

Partie A : deux indicateurs de dispersion.

1. 1. Pour tout nombre réel x ,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x^2 - 2x \cdot x_i + x_i^2) \\ &= nx^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) x + \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $G(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = n > 0$, $b = -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$ et $c = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Ce trinôme admet un unique minimum sur \mathbb{R} atteint en $\underline{x} = -b/(2a)$, ou encore

$$\underline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Sans expliciter les coefficients de G , on peut aussi calculer directement $G'(x) = 2nx - 2 \sum_{i=1}^n x_i$ et dresser un tableau de variation pour G .

2. Il s'agit de la moyenne des x_i (pondérés uniformément).

2. 1. Figure 1.

2. Figure 1.

3. Introduisons la fonction σ définie sur \mathbb{R} par

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

de sorte que pour tout réel x , $|x| = \sigma(x)x$. La fonction L est continue sur \mathbb{R} en tant que somme finie de fonctions continues. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, et sa dérivée admet sur cette réunion d'intervalles ouverts l'expression

$$(1) \quad L'(x) = \sum_{i=1}^n \sigma(x - x_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x > x_i} - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x < x_i}.$$

Distinguons les cas suivant la parité de n .

Si n est impair: Posons $n = 2d - 1$. D'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$L'(x) = \begin{cases} -n & x < x_1 \\ -n + 2 & x_1 < x < x_2 \\ \dots & \\ -1 & x_{d-1} < x < x_d \\ 1 & x_d < x < x_{d+1} \\ \dots & \\ n - 2 & x_{n-1} < x < x_n \\ n & x_n < x. \end{cases}$$

On en déduit que L admet un unique minimum sur \mathbb{R} , atteint en $x = x_d$.

Si n est pair: Posons $n = 2d$. D'après (1), pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$L'(x) = \begin{cases} -n & x < x_1 \\ -n + 2 & x_1 < x < x_2 \\ \dots & \\ -2 & x_{d-1} < x < x_d \\ 0 & x_d < x < x_{d+1} \\ 2 & x_{d+1} < x < x_{d+2} \\ \dots & \\ n - 2 & x_{n-1} < x < x_n \\ n & x_n < x. \end{cases}$$

On en déduit que L admet un minimum sur \mathbb{R} , atteint sur le segment $[x_d, x_{d+1}]$ où L est constante.

Ce qui est écrit ci-dessus reste valable (même si cela peut prendre parfois un contenu vide) si certains des x_i sont égaux.

4. L atteint son minimum en une valeur médiane des x_i .

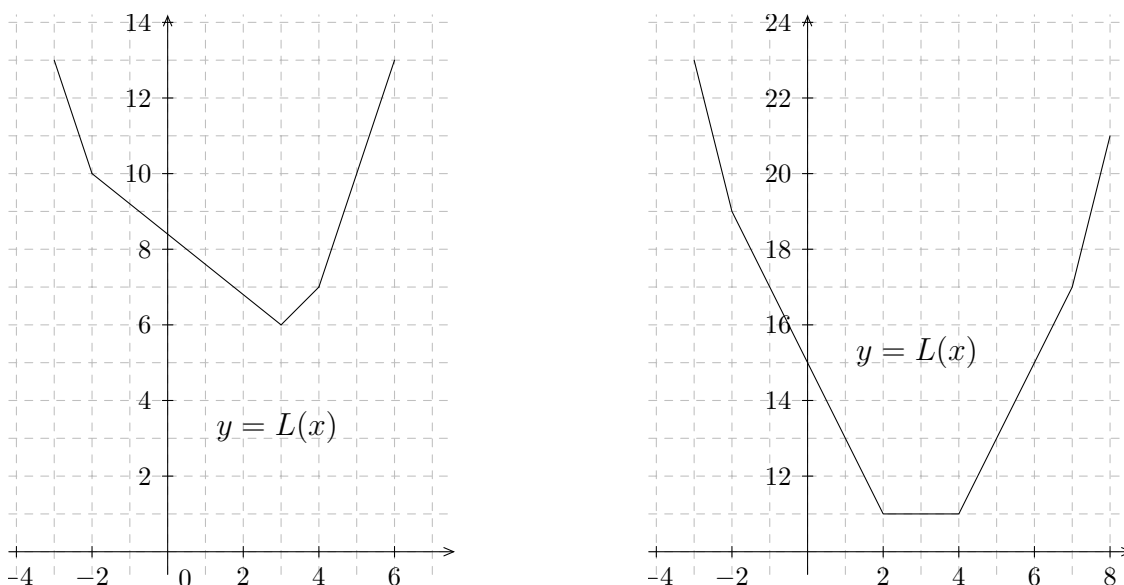


FIGURE 1. Réponse aux questions A.2.1 et A.2.2.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret.

1. 1. Dans ce cas, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$. Calculons :

$$H(A) = -4 \cdot \frac{1}{4} \ln(1/4) = \ln 4 = 2 \ln 2.$$

2. Calculons :

$$H(A) = -\frac{1}{2} \ln(1/2) - \frac{1}{4} \ln(1/4) - \frac{2}{8} \ln(1/8) = \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 2 = \frac{7}{4} \ln 2.$$

2. Par abus de notation, soit $H(p) = H(A)$. Calculons :

$$H(p) = -\frac{1}{p} \ln(1/p) - \frac{1}{1-p} \ln(1/(1-p)) = \frac{\ln p}{p} + \frac{\ln(1-p)}{1-p}.$$

H est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$H'(p) = \frac{1 - \ln p}{p^2} - \frac{1 - \ln(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{(1 - \ln p)(1-p)^2 - p^2(1 - \ln(1-p))}{p^2(1-p)^2}.$$

On analyse les variations du dénominateurs de la façon suivante :

- $p \mapsto 1 - \ln p$ est strictement positive et croissante sur $]0, 1[$
- $p \mapsto 1 - \ln(1-p)$ est strictement positive et décroissante sur $]0, 1[$
- $p \mapsto p^2$ est strictement positive et strictement croissante sur $]0, 1[$
- $p \mapsto (1-p)^2$ est strictement positive et strictement décroissante sur $]0, 1[$

Par somme et produit, le numérateur de $H'(p)$ définit une fonction décroissante sur $]0, 1[$, qui s'annule en $p = 1/2$ seulement. On en déduit que H' est strictement positive sur $]0, 1/2[$ et strictement négative sur $]1/2, 1[$. Donc la fonction H atteint son maximum, à savoir $\ln 2$, en $p = 1/2$.

3. 1. Pour $n = 1$, l'inégalité à démontrer est une égalité. On va donc procéder par récurrence avec pour cas d'initialisation $n = 1$. (Bien que le cas $n = 2$ découle de la définition de fonction convexe.)

Initialisation: Si $n = 1$, $\lambda_1 = 1$. Or $f(x_1) = f(x_1)$, ce qu'il faut démontrer.

Hérédité: Supposons l'inégalité de Jensen vraie pour $n - 1$, $n \geq 2$. Sans perte de généralité, $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_n \neq 1$.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) &= f\left(\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k\right) \\ &\leq \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k\right) \\ &\leq \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \end{aligned}$$

où l'on a appliqué successivement l'inégalité de convexité, puis l'inégalité de Jensen pour $n - 1$ points ; cet usage était licite, car

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} = \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_n} = 1.$$

4. Soit $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1[$. f est deux fois dérivable et

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \ln x + 1$$

$$\forall x \in]0, 1[, f''(x) = 1/x$$

La fonction f est donc convexe sur $]0, 1[$.

5. D'après l'inégalité de Jensen (Question B.2.3) appliquée à la fonction convexe $f : x \mapsto x \ln x$ sur $]0, 1[$ avec les poids uniformes $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} p_k \ln p_k \geq n \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{n} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{n} \right) = \ln(1/n).$$

Il en résulte que $H(A) \leq \ln n$. On pourrait traquer les cas d'égalité pour montrer que l'égalité a lieu si et seulement si les p_k sont égaux ; ce n'est pas demandé.

Partie C : théorie de l'information, le cas continu.

1. 1. **Première méthode (naïve)** Par définition de l'entropie, et sous réserve d'existence,

$$H(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} \right) dx.$$

Pour tout $s \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{-s}^s \frac{x^2}{2} e^{-x^2/2} dx &= \int_{-s}^s \frac{-x}{2} \left(-x e^{-x^2/2} \right) dx \\ &= \left[\frac{-x}{2} e^{-x^2/2} \right]_{-s}^s + \int_{-s}^s \frac{e^{-x^2/2}}{2} dx \\ &= s e^{-s^2/2} + \frac{1}{2} \int_{-s}^s e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

Quand $s \rightarrow +\infty$, le premier terme tend vers 0. Quand au second, la fonction $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est intégrable par les critères usuels, on retrouve son intégrale sur \mathbb{R} par une « astuce » standard :

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2/2} dr \\ &= 2\pi [e^{-r^2/2}]_0^{+\infty}, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini puis un changement de variables. On en déduit que g admet une entropie et, par linéarité de l'intégrale,

$$H(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \sqrt{2\pi} \frac{\ln(2\pi)}{2} \right) = \frac{1 + \ln(2\pi)}{2}.$$

Deuxième méthode (moins naïve) On utilise que g est une densité de probabilité (ce qui peut raisonnablement être admis d'après l'énoncé) et que sa variance vaut 1 (là, il faut connaître un peu la loi de Gauss), autrement dit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = 1.$$

On en déduit directement que $H(g) = (1 + \ln(2\pi))/2$. Je doute que la variance de la loi normale soit utilisable sans démonstration en toute légalité ici ¹ parce qu'elle fait l'objet de la question C.3.1 qui suivra.

2. On doit pour cette question modifier la définition de l'entropie donnée par l'énoncé :

$$H(h) = - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t}) dt = - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} (\ln \lambda - \lambda t) dt$$

La fonction $t \mapsto t e^{-\lambda t}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, par exemple parce qu'elle est majorée par $e^{-\lambda t/2}$ pour t assez grand. En intégrant par parties,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \left[\frac{t e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

donc

$$H(h) = -\ln \lambda + \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = 1 - \ln \lambda.$$

2. 1. Étant donné que x est un réel strictement positif, il est équivalent de montrer que

$$\ln y \leq \ln x + \frac{y-x}{x},$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. La fonction \ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, si x est différent de y alors il existe z compris entre x et y tel que

$$\ln y = \ln x + (y-x) \ln'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} \ln''(z) = \ln x + \frac{y-x}{x} - \frac{(y-x)^2}{2z^2}$$

1. C'est malgré tout le pari de F. Gramain dans *Épreuves écrites du CAPES, 12 sujets et corrigés (2015 à 2011)*, Cepaduès éditions, 2016. Les variables aléatoires à densité ne sont plus explicitement au programme spécifique de l'épreuve 1 en 2022, quoique le doute subsiste pour la loi exponentielle.

ce qui implique l'inégalité (stricte) demandée et démontre aussi que le cas d'égalité a lieu seulement si $y = x$.

2. C'est une question classique qui demande une rédaction propre. Supposons que f n'est pas identiquement nulle, et soit $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y > 0$. Nous savons que f est continue sur $[a, b]$, en particulier, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - c| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(c)| \leq y/2$ et donc, d'après l'inégalité triangulaire, $f(x) \geq y - y/2 = y/2$. On en déduit que

$$\int_a^b f(t) dt \geq \min(\eta, b - a) \frac{y}{2} > 0,$$

ce qu'il fallait montrer. *C'est le point essentiel de la démonstration du fait que la fonction qui à f associe $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*

3. 1. La fonction qui à t associe $t \exp(-t^2/2)$ est impaire et intégrable, donc d'intégrale nulle sur \mathbb{R} . D'autre part on a montré à la question C.1.1 que la fonction qui à t associe $t \exp(-t^2/2)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Donc $g \in \mathcal{N}$.

2. Du fait que f et g sont des lois de probabilité qui ont même espérance et variance, il ressort que pour tout polynôme P du second degré,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) P(x) dx.$$

C'est en particulier vrai pour $P(x) = \ln g(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Je commence par supposer que f est de valeurs strictement positives, et signalerai plus loin comment s'affranchir de cette hypothèse. Par linéarité de l'intégrale et d'après la question C.3.1, pour toute $f \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} H(f) - H(g) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ln f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ln g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\ln g(t) - \ln f(t)) dt \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(t) (\ln g(t) - \ln f(t)) dt \end{aligned}$$

D'après les question C.2.1 et C.2.2, pour tout $r > 0$,

$$\int_{-r}^r f(t) (\ln g(t) - \ln f(t)) dt \leq 0$$

avec égalité si et seulement si f et g coïncident sur $[-r, r]$; de plus cette intégrale est fonction décroissante de r . En passant à la limite quand r tend vers $+\infty$, on obtient que $H(f) \leq H(g)$ d'une part, et qu'il y a égalité si et seulement si $f = g$ d'autre part. Finalement, f n'est pas nécessairement à valeurs positives. Toutefois,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

donc pour toute $f \in \mathcal{N}$, $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f(t))dt$ où \mathcal{H} est la fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Les raisonnements ci-dessus s'appliquent en remplaçant l'intégrande par 0 partout où f s'annule.

Commentaires.

Extraits de rapport du jury. Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes :

- rédiger un raisonnement par récurrence : 36% des candidats ont traité correctement au moins une des questions C.2.4 du problème ² 1 ou B.3.1 du problème 2, alors que 25% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 39% ne fournissent aucune réponse ;
- représenter graphiquement une fonction affine par morceaux : 42% des candidats ont traité correctement au moins une des questions A.2.1 ou A.2.2 du problème 2, alors que 32% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 26% ne fournissent aucune réponse ;
- justifier correctement l'existence d'un extremum : 41% des candidats ont traité correctement au moins une des questions B.1.2 du problème 1 ou B.2 du problème 2, alors que 39% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 20% ne fournissent aucune réponse.

Les futurs candidats tireront les conclusions qui s'imposent de cette étude statistique des copies. Un effort particulier doit être fait pour maîtriser parfaitement les raisonnements classiques ainsi que les savoir-faire de base indispensables à l'exercice du métier d'enseignant.

[...]

Dans le problème 2, l'inégalité de Jensen est abordée dans la plupart des copies. Mais l'indication de l'énoncé n'est pas comprise ; l'initialisation est mal traitée et les candidats n'écrivent pas correctement l'hypothèse de récurrence puis oublient de vérifier que la somme des poids vaut 1 pour l'hérédité. Par ailleurs, la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux met en difficulté plus de la moitié des candidats.

L'information vue comme une grandeur. C'est une grandeur mesurable. Quand on l'exprime avec les formule du problème, son unité est le nat (unité naturelle). Une autre unité courante est le shannon (plus communément appelé bit) qui correspond à l'entropie de la variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$. Un shannon, c'est donc environ 0,69 nat. Mentionnons aussi le hartley (ou ban), qui vaut $\ln(10)$ nat, soit environ 2,30 nat ou 3,32 shannon et le byte, qui vaut 8 shannon.

En physique l'entropie se mesure en joule par kelvin ; bien qu'on ne l'applique pas exactement aux mêmes objets, l'entropie de la physique statistique correspondrait à l'entropie naturelle de la variable aléatoire uniforme à valeur dans l'espace des états, multipliée par la constante de Boltzmann, dont la valeur est fixée dans le système SI, selon la formule

$$S = k \ln \Omega.$$

2. NdR : il n'est pas fait de distinction entre le problème 1 et le problème 2.

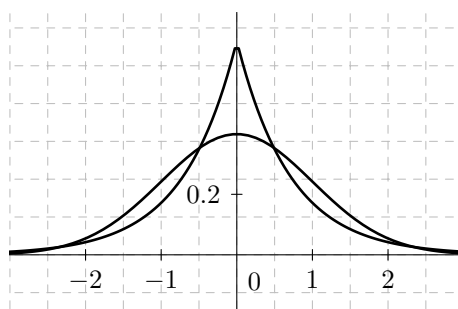


FIGURE 2. Loi normale et loi de Laplace de variance 1.

Une grandeur quotient fréquemment utilisée est le débit d'information, ou *bit rate*, que l'on pourrait mesurer en nat par seconde, bien qu'une unité plus courante soit le (kilo, mega, giga) byte par seconde. Deux des caractéristiques de la « révolution numérique » ont été et sont encore la diminution du coût du stockage de l'information traitable, et l'augmentation des débits. Par exemple, la base de donnée des fins de partie d'échecs partant des positions possibles avec au plus 7 pièces est disponible en ligne et occupe 18,4 terabyte. Si elle devait être écrite dans le format de la bibliothèque de Babel de Jorge Luis Borges, elle remplirait plus de 37000 pièces hexagonales, renfermant chacune 640 livres de 410 pages couvertes de 50 lignes de 80 caractères d'un alphabet de 25 symboles.

Entropie de la loi de Laplace. La loi de Laplace de paramètre b a pour densité

$$\ell(x) = \frac{1}{2b} e^{-|x|/b}$$

et pour variance $2b^2$. Son entropie est $H(\ell) = 1 + \ln(2b)$. En particulier, la loi de Laplace de variance 1 a pour entropie $1 + \ln(\sqrt{2}) \approx 1.346$, à comparer avec $H(g) \approx 1.419$.

2. ÉPREUVE ÉCRITE 2016-1, PROBLÈME 1

Partie A. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient a_1, \dots, a_n des nombres réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n; i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$P(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

► Il y a 3 assertions à vérifier : le fait que $L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, que son évaluation en les a_i est telle que dans l'énoncé, et l'unicité.

Par définition, L_k est produit de $n - 1$ polynômes de degré 1, il est donc de degré $n - 1$.

Calculons : pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $i \neq k$,

$$L_k(a_i) = \prod_{1 \leq j \leq n; j \neq k} \frac{a_i - a_j}{a_k - a_j} = \frac{a_i - a_i}{a_k - a_i} \prod_{1 \leq j \leq n; j \neq k, j \neq i} \frac{a_i - a_j}{a_k - a_j} = 0,$$

tandis que

$$L_k(a_k) = \prod_{1 \leq j \leq n; j \neq k} \frac{a_k - a_j}{a_k - a_j} = \prod_{1 \leq j \leq n; j \neq k} 1 = 1.$$

Finalement, soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant l'identité pour les $P(a_i)$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors le polynôme $Q = P - L_k$ possède pour racines a_1, \dots, a_n . Les polynômes $X - a_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont premiers entre eux deux à deux, et divisent Q dans $\mathbb{R}[X]$. Donc $\prod_i (X - a_i)$ divise Q . Donc Q est nul ou de degré $\geq n$. Or $\deg Q \leq \max(\deg P, \deg L_k) \leq n - 1$. Donc $Q = 0$, autrement dit $P = L_k$.

II. On considère l'application

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

1. Montrer que F est une application linéaire.
 2. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.
 3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.
- 1. Nous allons montrer que F est \mathbb{R} -linéaire. Soient λ un nombre réel, et $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} F(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(a_1), \dots, (P + \lambda Q)(a_n)) \\ &= (P(a_1) + \lambda Q(a_1), \dots, P(a_n) + \lambda Q(a_n)) \\ &= (P(a_1), \dots, P(a_n)) + (\lambda Q(a_1), \dots, \lambda Q(a_n)) \\ &= (P(a_1), \dots, P(a_n)) + \lambda (Q(a_1), \dots, Q(a_n)) \\ &= F(P) + \lambda F(Q). \end{aligned}$$

- 2. D'après la question I, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $F(L_k) = e_k$.

- **3.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n . Posons $P = \sum_{k=1}^n x_k L_k$. Alors par linéarité de F , et d'après la question **I.2**,

$$F(P) = \sum_{k=1}^n x_k F(L_k) = \sum_{k=1}^n x_k e_k = x.$$

Nous avons montré que F est surjective. De plus, $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$. F est une application linéaire et surjective entre espaces vectoriels de même dimension finie. Donc F est bijective. Notons que l'on retrouve ici l'unicité de L_k dans la question **I**.

- **4.** *Espaces vectoriels de dimension finie*

III. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ce polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse a_1, \dots, a_n .
2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse a_1, \dots, a_n à l'aide des polynômes L_1, \dots, L_n et des valeurs de f en a_1, \dots, a_n .

- **1.** *Considérons le vecteur $u_f = (f(a_1), \dots, f(a_n))$ de \mathbb{R}^n . D'après la question **II.3** il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = u_f$. Autrement dit il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.*

- **2.** *Posons $\tilde{P} = \sum_{k=1}^n f(a_k) L_k$. Alors par linéarité de F ,*

$$F(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^n f(a_k) F(L_k) = \sum_{k=1}^n f(a_k) e_k = u_f.$$

Il convient donc de prendre $P = \tilde{P}$, ce qui répond à la question.

Partie B. Soient $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^n([a; b])$ et $a_1 < \dots < a_n$ appartenant à $[a; b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisse a_1, \dots, a_n ; on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le but de cette partie est de majorer $|f - P|$ sur le segment $[a; b]$.

I. Soit g une fonction définie sur le segment $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Énoncer le théorème de Rolle
 2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a; b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a; b]$. Montrer que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.
- **1. Théorème de Rolle** *Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.*
- **2.** *Nous allons le montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par récurrence sur n :*

Initialisation: *Si $n = 1$, c'est une conséquence du théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a'; b']$, où $a' = \inf \{x \in [a; b] : f(x) = 0\}$ et $b' = \sup \{x \in [a; b] : f(x) = 0\}$ (on a bien $a' < b'$ par hypothèse).*

Hérédité: Supposons $n \geq 2$. Ordonnons les points où g s'annule, et nommons-les a_1, \dots, a_{n+1} de sorte que

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq b$$

D'après le théorème de Rolle, sur les n intervalles $]a_i; a_{i+1}[$ avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la fonction g' s'annule : disons $g'(c_i) = 0$ avec $a_i < c_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et notons que les c_i sont distincts deux à deux. Mais alors g' est $(n-1)$ fois dérivable sur $[c_1; c_n]$, et s'y annule n fois. Par hypothèse de récurrence, la fonction $(g')^{(n-1)}$ s'annule sur $[c_1; c_n]$, en particulier $g^{(n)}$ s'annule sur $[a; b]$.

II. On fixe $c \in [a; b]$, distinct de a_1, \dots, a_n . On définit la fonction g_c sur $[a; b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a; b]$.
2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a; b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a; b]$.
3. Soit h_c la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_c(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}$. En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n , donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

► 1. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous avons

$$\begin{aligned} g_c(a_i) &= f(a_i) - P(a_i) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{a_i - a_k}{c - a_k} \\ &= 0 - (f(c) - P(c)) \frac{a_i - a_i}{c - a_i} \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{a_i - a_k}{c - a_k} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que P est le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisse a_1, \dots, a_n . De plus,

$$\begin{aligned} g_c(c) &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{c - a_k}{c - a_k} \\ &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et par hypothèse, c est distinct de a_i pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donc g_c s'annule en $n+1$ points.

► 2. Par hypothèse, f est de classe \mathcal{C}^n , en particulier elle est n fois dérivable. En anticipant sur la notation introduite par l'énoncé à la question suivante,

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c))h_c(x),$$

où h_c est une fonction polynôme. Ainsi, g_c est combinaison \mathbb{R} -linéaire de fonctions n fois dérivables, donc g_c est n fois dérivable. D'après les questions B.I.2 et B.II.1, $g_c^{(n)}$ s'annule sur $[a; b]$.

- **3.** h_c est une fonction polynôme de degré n . Son coefficient dominant est $\prod_{k=1}^n (c - a_k)^{-1}$, donc $h_c^{(n)}$ est la fonction constante égale à

$$h_c^{(n)} \equiv n! \prod_{k=1}^n (c - a_k)^{-1}.$$

D'autre part, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P^{(n)}$ est identiquement nulle. On en déduit que pour tout $x \in [a; b]$,

$$g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c))n! \prod_{k=1}^n (c - a_k)^{-1}.$$

III. 1. Dédurre des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a; b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k).$$

- 2.** Montrer que le résultat établi dans la question **III.1** reste vrai si c est égal à l'un des a_k .
3. En déduire que

$$\max_{x \in [a; b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a; b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

- **1.** D'après la question **B.II.2** il existe $\zeta \in [a; b]$ tel que $g_c^{(n)}(\zeta) = 0$, et d'après la question **B.II.3**,

$$0 = g_c^{(n)}(\zeta) = f^{(n)}(\zeta) - (f(c) - P(c))n! \prod_{k=1}^n (c - a_k)^{-1}.$$

On en déduit que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k).$$

- **2. Première méthode** P est le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisse a_1, \dots, a_n . Donc si c est égal à l'un des a_k , $f(c) - P(c) = 0$, tandis que le produit de droite s'annule pour tout ζ .

Seconde méthode (sans calcul) On peut voir le membre de gauche de l'égalité obtenue dans la question **B.III.1** comme une fonction continue de la variable c variant dans $[a; b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, qui est dense dans $[a; b]$. Le membre de gauche admet des limites finies quand $c \rightarrow a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Fixons $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et posons ζ_p un ζ tel que l'identité est valable pour $c = a_k + 1/p$, quand p est assez grand (disons $p \geq p_0$) pour que $a_k + 1/p$ soit différent des a_i pour tout i . Alors l'égalité vaut pour tout $c \in [a; b]$, quitte à prendre dans ce cas pour ζ une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(\zeta_p)_{p \geq p_0}$ (qui existe car $[a; b]$ est un segment).

- **3.** D'après la question **B.III.2**, pour tout $x \in [a; b]$ il existe $\zeta \in [a; b]$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (x - a_k)$. D'autre part, f étant de classe \mathcal{C}^n , pour tout $\zeta \in [a; b]$,

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leq \sup_{[a; b]} |f^{(n)}| = \max_{[a; b]} |f^{(n)}|,$$

car $[a; b]$ est un segment. On en déduit que

$$\max_{x \in [a; b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{\max_{[a; b]} |f^{(n)}|}{n!} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

Partie C. Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f: \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x). \end{cases}$$

I. Première méthode. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisse $0, \frac{\pi}{2}$ et π .

1. Calculer P .
2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que³ pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [0; \pi]} \frac{|x(x - \pi/2)(x - \pi)|}{6}$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216}.$$

- **1.** Posons $a_1 = 0, a_2 = \pi/2$ et $a_3 = \pi$. Alors avec les notations de la partie **A**,

$$L_1(X) = \frac{2}{\pi^2} \left(X - \frac{\pi}{2}\right) (X - \pi)$$

$$L_2(X) = -\frac{4}{\pi^2} X (X - \pi)$$

$$L_3(X) = \frac{2}{\pi^2} X \left(X - \frac{\pi}{2}\right).$$

D'après la question **A.III.2**, on en déduit que

$$P(X) = \sin(0)L_1(X) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2(X) + \sin(\pi)L_3(X) = \frac{4}{\pi^2}X(\pi - X).$$

- **2.** Nous allons appliquer le résultat de la question **B.III.3** avec $f = \sin$, $n = 3$ et P comme à la question précédente. Pour cela, nous devons majorer la fonction $|\sin^{(3)}|$ sur $[0; \pi]$:

$$\forall x \in [0; \pi], |\sin^{(3)}(x)| = |-\cos(x)| \leq 1.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \forall y \in [0; \pi], |f(y) - P(y)| &\leq \max_{x \in [0; \pi]} \frac{|x| \left|x - \frac{\pi}{2}\right| |x - \pi|}{6} \\ &= \max_{x \in [0; \pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}. \end{aligned}$$

3. NdR : On pourrait préférer éviter l'usage de la variable x des deux côtés dans l'inégalité qui suit. Nous gardons la formulation de l'énoncé.

► **3.** *Introduisons la fonction*

$$\eta: \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) (x - \pi). \end{cases}$$

η est dérivable sur $[0; \pi]$, de dérivée

$$\eta'(x) = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{2}.$$

L'étude du signe du trinôme $\eta'(x)$ permet d'établir un tableau de variations pour η , et, de là, de déterminer que

$$\max_{x \in [0; \pi]} |\eta(x)| = \left| \eta \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \right) \right| = \left| \eta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \right) \right| = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{36}.$$

Reportant ceci dans l'inégalité exprimée à la question **C.I.2**, nous obtenons que pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{6 \cdot 36} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note P_k le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 d'interpolation de f aux deux points d'abscisse $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{n}, \\ P_1(x) & \text{si } \frac{\pi}{n} \leq x < \frac{2\pi}{n}, \\ \vdots & \\ P_k(x) & \text{si } \frac{k\pi}{n} \leq x < \frac{(k+1)\pi}{n}, \text{ pour } k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket, \\ \vdots & \\ P_{n-1}(x) & \text{si } \frac{(n-1)\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2 . Tracer la courbe représentative de Q_2 .
2. Justifier que Q_n est continue sur $[0; \pi]$.
3. Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]$,

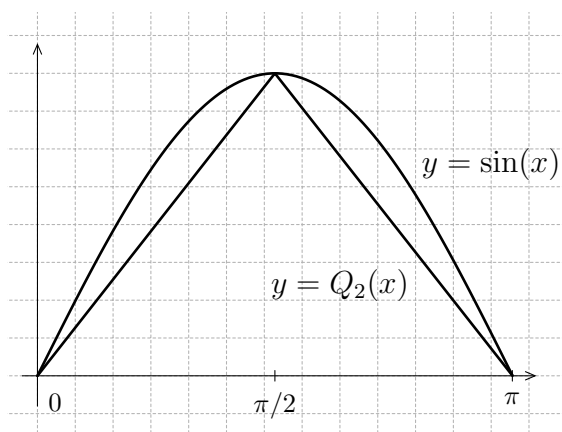
$$\left| \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n} \right) \right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

► **1.** *On trouve $Q_1(x) \equiv 0$ et*

$$Q_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$



- **2.** Q_n est affine, donc continue, sur tous les intervalles ouverts $]k\pi/n; (k+1)\pi/n[$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. La continuité de Q_n aux points $k\pi/n$ découle de la définition de polynôme d'interpolation.

- **3.** Pour tous réels u, v nous avons

$$uv \leq \frac{(u+v)^2}{4}$$

en vertu de l'identité $(u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2 \geq 0$. On applique cela à

$$u = \left| x - \frac{k\pi}{n} \right| \text{ et}$$

$$v = \left| x - \frac{(k+1)\pi}{n} \right|,$$

dont la somme est égale à π/n . Cela donne le résultat demandé.

- **4.** D'après la question **B.III.3** appliquée à la fonction $f = \sin$ et à Q_n restreintes au segment $[k\pi/n; (k+1)\pi/n]$ (c'est-à-dire à \sin et P_k), on trouve que pour tout $y \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]$,

$$(*) \quad |f(y) - Q_n(y)| \leq \frac{\max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]} |\sin''(x)|}{2} \max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]} \left| x - \frac{k\pi}{n} \right| \left| x - \frac{(k+1)\pi}{n} \right|.$$

Notons que

$$\max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]} |\sin''(x)| = \max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]} |-\sin(x)| \leq 1.$$

Le membre de droite dans l'inégalité (*) est donc majoré par $\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4n^2}$ d'après la question **B.II.3**. Ces inégalités sont valables pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On a donc pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure? Justifier.

Dans la première méthode, nous avons borné l'erreur d'approximation par $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$ à la question **C.I.3**. La deuxième méthode donne une meilleure garantie dès que $\pi^2/(8n^2) \leq \pi^3\sqrt{3}/216$. Or

$$\frac{\pi^2}{8n^2} \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{27} \iff n^2 \geq 2,$$

ce qui arrive dès que $n \geq 2$. On conçoit donc que la seconde méthode est meilleure. Cependant, s'il s'agissait d'interpoler au points d'abscisse $\frac{k}{n}$ par un polynôme de degré $n - 1$, l'erreur serait majorée par

$$\frac{1}{n!} \max_{x \in [0; \pi]} \prod_{k=0}^n \left| x - \frac{k\pi}{n} \right|$$

d'après la question **B.II.3**. On peut montrer que le maximum de droite est de limite nulle quand n tend vers l'infini. Donc si \tilde{P}_n désigne le polynôme d'interpolation correspondant, alors $\max_{0 \leq x \leq \pi} |\tilde{P}_n(x) - f(x)| = o(1/n!)$.

Partie D. On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a_1, \dots, a_n sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k [pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $n \in \mathbb{R}$] pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$. Quand $n = 2$,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Quand $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_3 a_2^2 - a_1 a_3^2 \\ = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question **A.II.1** dans des bases bien choisies.
2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts alors A est inversible.
3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?
4. Conclure.
 - **1.** Considérons la base $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par définition de l'application F , $F(X^{k-1}) = (a_1^{k-1}, \dots, a_n^{k-1})$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donc A est la matrice de $F: \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans les bases \mathcal{F} au départ et (e_1, \dots, e_n) à l'arrivée.
 - **2.** Nous avons vu à la question **A.II.3** que si les a_k sont deux à deux distincts, alors F est bijective. Puisque A représente F , A est inversible dans ce cas.
 - **3.** Si $a_i = a_j$ avec $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $i \neq j$, alors les lignes de A d'indice i et j sont égales, en particulier elles sont colinéaires, donc $\det A = 0$.
 - **4.** D'après les questions **D.II.2** et **D.II.3**, A est inversible si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.

III. Seconde méthode On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \cdots + \lambda_0.$$

2. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

► 1. Par définition, P est un polynôme unitaire de degré $n - 1$.

► 2. Calculons :

$$\begin{aligned} C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0C_1 &= \begin{pmatrix} a_1^{n-1} + \lambda_{n-2}a_1^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} + \lambda_{n-2}a_{n-1}^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ a_n^{n-1} + \lambda_{n-2}a_n^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'après la question **D.III.1**. Or $P(a_k) = 0$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ étant donné que $(X - a_k)$ divise P dans ce cas. Ceci prouve l'identité demandée.

► 3. D'après le caractère multilinéaire alterné du déterminant, on peut ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes sans le changer. Donc d'après la question **D.III.2**, en remplaçant C_n par $C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0C_1$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

Par développement suivant la dernière colonne on en déduit l'inégalité demandée.

- 4. Ceci se démontre par récurrence sur n

Initialisation: Si $n = 1$, le produit $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k)$ est indexé par l'ensemble vide, donc égal à 1, ce qui est égal au déterminant de la matrice $A = 1$.

Hérédité: Supposons $n \geq 2$. Alors d'après la question **D.III.3** et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \det(A) &= P(a_n) \prod_{1 \leq k < l \leq n-1} (a_l - a_k) \\ &= (a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) \prod_{1 \leq k < l \leq n-1} (a_l - a_k) \\ &= \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k). \end{aligned}$$

- 5. \mathbb{R} est un corps, en particulier c'est un anneau intègre : un produit (fini) de réels est nul si et seulement si l'un de ces réels est nul. Donc $\det A = 0$ si et seulement si il existe $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ tels que $a_i - a_j = 0$. Autrement dit A est inversible si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux.

Partie E. On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3 .

- I.** Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leq i \leq 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α) avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S): \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha &= b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.
3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.
- Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α) .
 - Exprimer α sous la forme d'un quotient de déterminants.
 - Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

i. $\alpha = 0$.

ii. $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.

iii. A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1 , A_2 et A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2) , (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D .
- 1. Dire que (γ, β, α) est solution du système (S) , c'est dire que (a_i, b_i) est sur la courbe d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Or cette courbe est une parabole d'axe parallèle à D , et toutes les paraboles d'axe parallèle à D ont une équation de cette forme.
- 2. Par hypothèse les points A_1 , A_2 et A_3 sont distincts. Donc si A_1 et A_2 , disons, ont la même abscisse $a_1 = a_2$, alors ils ont des ordonnées distinctes, $b_1 \neq b_2$. Mais $\gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha$. Donc le système (S) n'a pas de solution.
- 3. a. D'après la question **A.II.3** pour $n = 2$, le point (b_1, b_2, b_3) possède un antécédent dans $\mathbb{R}_2[X]$ par l'application F .

b. D'après la règle de Cramer,

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

où l'on a utilisé la valeur du déterminant de Vandermonde d'ordre 3 établi dans la partie **D**.

c. Supposons **i**. Alors d'après la question **E.I.3.b**,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}.$$

Supposons **ii**. Alors les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ sont colinéaires. Donc A_1 , A_2 et A_3 sont alignés.

Supposons **iii**. Alors il existe une droite affine passant par A_1 , A_2 et A_3 . Cette droite est représentée par une équation de la forme $y = \beta x + \gamma$. Par unicité du polynôme d'interpolation, $\alpha = 0$.

- 4. D'après la question **E.I.2**, il est nécessaire que les abscisses des points A_1 , A_2 et A_3 soient toutes distinctes, autrement dit qu'aucune des droites (A_1A_2) , (A_2A_3) et (A_1A_3) ne soit parallèle à D . D'après la question **E.I.3.c**, il est nécessaire que A_1 , A_2 et A_3 ne soient pas alignés. D'après la question **E.I.3.a**, quand ces deux conditions sont réunies, le problème tel que défini dans l'énoncé de la question **E.I** admet une solution.

- II. 1.** On suppose A_1 , A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1 , A_2 et A_3 .
- 2.** On suppose que A_1 , A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1 , A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.

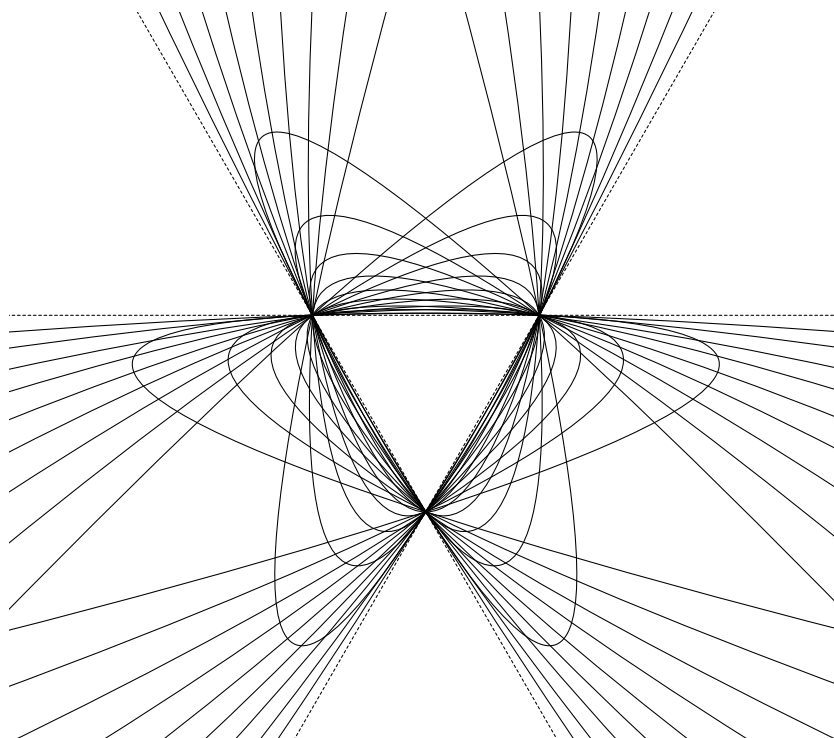


FIGURE 3. Paraboles passant par les sommets d'un triangle du plan affine.

- ▶ 1. *Si par l'absurde il y existait une parabole passant par A_1 , A_2 et A_3 , alors en posant D son axe, il y aurait une parabole d'axe parallèle à D passant par A_1 , A_2 et A_3 . Nous avons montré à la question **E.I.4** que ce problème n'a pas de solution quand A , B et C sont alignés.*
- ▶ 2. *Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ définissent 3 directions du plan. Puisque le corps \mathbf{R} est infini, il reste dans le plan une infinité de directions qui leur sont différentes. D'après la question **E.I.4**, chacune des directions restantes est celle de l'axe d'une parabole passant par A_1 , A_2 et A_3 .*

Extraits du rapport de jury. « Le jury a été particulièrement attentif aux questions suivantes :

- Question **A.II.3** du premier problème Dans cette question, on demandait de montrer qu'une application linéaire était bijective, en s'appuyant sur un argument de dimension finie. Environ 22 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; 36 % n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 42 % n'ont pas abordé cette question. [...]
- Question **D.III.3** du premier problème Il s'agissait ici d'exploiter les propriétés du déterminant. Environ 19 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; 12 % n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 61 % n'ont pas abordé cette question. »

« Le théorème de Rolle, qui semble assez bien connu, est souvent énoncé avec des hypothèses trop fortes⁴; il est également parfois confondu avec le théorème des accroissements finis. »

« La gestion des indices est perfectible dans beaucoup de copies; ainsi la partie **A** du premier problème a révélé de nombreuses erreurs d'écriture: par exemple, pour écrire $L_k(a_i)$ sous forme d'un produit, il est nécessaire d'utiliser un indice muet que l'on ne peut noter ni i , ni k . »

Remarque. L'interpolation polynomiale fait dorénavant partie des problèmes d'application possible du programme de Terminale mathématiques expertes.

2.1. Rappels de cours.

2.1.1. Théorème de Rolle, interpolation et approximation.

Théorème. Soient a et b deux nombres réels, avec $a \leq b$. Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint sa borne supérieure en un point de $[a; b]$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $[a; b]$ telle que $f(x_n) \geq \sup f - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Une telle suite existe bien par définition de la borne supérieure. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass pour $[a; b]$, il existe $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $x \in [a; b]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x$. Par continuité de f en x , $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \sup f$. \square

Théorème (Lemme ou Théorème de Rolle). Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si $a = b$ il n'y a rien à montrer; on supposera donc $a < b$. Si f est identiquement nulle, alors il suffit de prendre $c = \frac{a+b}{2}$; on supposera donc que f n'est pas identiquement nulle. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\sup_{[a; b]} f > 0$. D'après le théorème précédent, f étant continue, elle atteint son maximum en un point $\tilde{c} \in [a; b]$; puisque $f(a) = f(b) = 0$, \tilde{c} est dans $]a; b[$. Montrons alors que $f'(\tilde{c}) = 0$. Si par l'absurde ce n'est pas le cas, alors

- Ou bien $f'(\tilde{c}) > 0$, auquel cas il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [\tilde{c}, \tilde{c} + \varepsilon]$, $f(x) \geq f(\tilde{c}) + \frac{1}{2}f'(\tilde{c})(x - \tilde{c}) > f(\tilde{c}) = \sup f$.
- Ou bien $f'(\tilde{c}) < 0$, auquel cas il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [\tilde{c} - \varepsilon, \tilde{c}]$, $f(x) \geq f(\tilde{c}) - \frac{1}{2}f'(\tilde{c})(\tilde{c} - x) > f(\tilde{c}) = \sup f$.

Les deux cas mènent à une contradiction, ce qui conclut la preuve. \square

Attention, le théorème ne s'applique pas aux fonctions f à valeurs dans \mathbb{C} (a fortiori à valeurs vectorielles). On pourra penser à

$$f: t \mapsto 1 - e^{it}$$

qui est de classe \mathcal{C}^∞ et pour laquelle on vérifie $f(0) = f(2\pi) = 0$, mais dont la dérivée ne s'annule pas sur $[0; 2\pi]$.

Théorème (Théorème des accroissements finis). Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4. NdR: L'hypothèse faite sur la fonction f par l'énoncé dans la partie **B** était légèrement plus forte que celle demandée par le théorème de Rolle. On peut supposer que cela a pu faire douter des candidats. D'où l'importance de bien connaître les hypothèses des théorèmes.

On a vu une application de ce théorème dans le sujet **2021-1-B** (prolongement de la dérivée vers la borne d'un intervalle). Une autre application plus connue est la formule de Taylor-Lagrange, qui suit. (Démontrée dans la partie **C** du problème 2 du sujet **2016-1**.)

Théorème. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > a$. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur $[a; x]$, et n fois dérivable sur $]a; x[$. Alors il existe $\zeta \in]a; x[$ tel que

$$(TL) \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a; x]$, alors $f^{(n)}$ est bornée sur $[a; x]$ et

$$(ITL) \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \sup_{a \leq z \leq x} |f^{(n)}(z)|.$$

La formule obtenue à la question **B.III.1** du sujet **2016-1-Problème 1** est une forme délocalisée du théorème de Taylor-Lagrange. Le polynôme de Taylor qui apparaît dans le membre de gauche de (TL) est un « polynôme d'interpolation de f au point a avec multiplicité n » (on peut donner un sens précis à cette affirmation en passant à la limite où les a_k se confondent). De même, la question **BIII.3** est une variante de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Le théorème de Rolle a d'autres applications notable, parmi lesquelles :

- Le théorème de Darboux : si f est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle I , alors $f'(I)$ est un intervalle. En particulier, la propriété des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues⁵.
- L'interpolation d'Hermite, qui, sous la forme la plus simple, s'énonce comme suit : si f à valeurs réelles est de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, 1]$, et si $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ alors pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|f(x)| \leq \frac{\max |f^{(4)}(x)|}{24} x^2(1-x)^2,$$

ce qui constitue encore un cas limite d'interpolation de Lagrange sur $[0, 1]$ avec $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1$.

2.1.2. Méthodes linéaires en géométrie affine. La question **E.I.3** du premier problème de **2016-1** demandait d'établir une équivalence entre des conditions traduisant l'alignement de trois points dans le plan affine réel. Nous donnons ici un cadre théorique pour cette question. Il est utile de représenter le plan affine réel \mathcal{P} dans \mathbf{R}^3 muni du système de coordonnées x, y, z par le plan d'équation $z = 1$ (dans le cas de la question **E.I.3**, c'est la première coordonnée qui est fixée égale à 1). \mathcal{P} hérite alors d'un repère privilégié et de coordonnées (x, y) par restriction des coordonnées de \mathbf{R}^3 .

5. Toutefois, on peut montrer que si f envoie tout segment sur un segment et si $f^{-1}(x)$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est continue.

Proposition (Condition d'alignement). *Dans \mathcal{P} , les points $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ et $A_3(x_3, y_3)$ sont alignés si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit u_i le vecteur de \mathbf{R}^3 de coordonnées $(x_i, y_i, 1)$. Alors les points A_1 , A_2 et A_3 sont alignés si et seulement si les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont liés. \square

Proposition (Condition de concourance ou parallélisme). *Dans \mathcal{P} , les droites*

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\Delta_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit Π_i le plan vectoriel de \mathbf{R}^3 d'équation

$$a_ix + b_iy + c_iz = 0.$$

Alors $\Delta_i = \Pi_i \cap \mathcal{P}$. Les droites Δ_i sont parallèles ou concourantes si et seulement si Π_1 , Π_2 et Π_3 ont une direction commune. Soit φ_i la forme linéaire qui à $(x; y; z) \in \mathbf{R}^3$ associe $a_ix + b_iy + c_iz \in \mathbf{R}$. Alors $\Pi_i = \ker \varphi_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, et dire que les Π_i ont une direction commune, c'est dire que les φ_i sont liées. \square

Les énoncés précédents ont l'avantage de conférer aux trois objets (points ou droites) des rôles symétriques, alors que quand on formule la condition d'alignement sous la forme vectorielle dans \mathbf{R}^2 , un choix doit être fait : les points de coordonnées (a_i, b_i) pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont alignés si et seulement si, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0;$$

mais on aurait aussi bien pu choisir

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. ÉPREUVE ÉCRITE 2017-1, PROBLÈME 2

Énoncé. \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. Dans ce problème⁶ on cherche à déterminer les applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y ,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(b) f est bornée sur $]1, +\infty[$: il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $x \geq 1$,⁷ $f(x) \leq A$.

I. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit φ une application définie sur I et à valeurs dans I . On dit que φ est une involution de I si pour tout nombre réel x dans I ,

$$\varphi(\varphi(x)) = x.$$

1. Donner un exemple d'involution de \mathbb{R} dans \mathbb{R} autre que l'identité.
2. Donner un exemple d'involution de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ autre que l'identité.
3. Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les conditions (a) et (b).

1. Soient deux nombres réels y_1, y_2 strictement positifs tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.
4. Montrer que f est une involution de $]0, +\infty[$.
5. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
Indication : on pourra poser $y = f(b)$.

III. On note F l'ensemble des points fixes de f :

$$F = \{x \in]0, +\infty[, f(x) = x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, xf(x) \in F$.
2. Montrer que $1 \in F$.
3. Montrer que si x et y sont des éléments de F alors xy et $\frac{x}{y}$ sont également des éléments de F .
4. Montrer que si x est un élément de F alors pour tout entier naturel n , x^n est aussi un élément de F .

6. NdR : C'est une variante du Problème 1 de l'Olympiade Internationale de Mathématiques (IMO) de 1983, organisée à Paris, qui demandait de trouver toutes les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ telles que

(a) $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tous x et y dans $]0, +\infty[$
 (b') $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On trouvera le sujet ici : https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=1983.

7. NdR : cette phrase semble finalement dire que f doit être bornée sur $[1, +\infty[$. C'est un peu perturbant, mais cela revient à demander à f d'être bornée sur $]1; +\infty[$ quitte à remplacer A par $\max(f(1), A)$.

5. Montrer que si x est un élément de F alors $x \leq 1$. *Indication* : on pourra considérer la suite $(x^n)_{n \geq 0}$.
6. Montrer que $F = \{1\}$.
7. En déduire f .

IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.

Correction. Je noterai \mathbb{R}_+^\times l'intervalle $]0, +\infty[$.

- I. 1. Soit $o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction opposé, qui à x associe $-x$. Alors pour tout x réel,

$$o(o(x)) = -(-x) = x,$$

donc o est une involution. Elle est différente de l'identité car $o(1) = -1$ et $1 \neq -1$.

2. Soit $i: \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ la fonction inverse, qui à x associe $1/x$. Alors pour tout x réel strictement positif,

$$i(i(x)) = (x^{-1})^{-1} = x,$$

donc i est une involution. Elle est différente de l'identité car $i(2) = 1/2$ et $2 \neq 1/2$.

3. Soit φ une involution de l'intervalle I . Alors on a la suite d'inclusions

$$I = \varphi(\varphi(I)) \subseteq \varphi(I) \subseteq I,$$

il y a donc égalité dans la dernière inclusion, et φ est surjective. Par ailleurs, pour tous x et y dans I , si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors

$$x = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(\varphi(y)) = y,$$

donc φ est injective. Ceci achève la démonstration.

II. Soit f une fonction vérifiant les conditions (a) et (b).

1. D'après la condition (a) appliquée avec $x = 1$, pour tout y réel strictement positif, $f(f(y)) = yf(1)$. Si donc $f(y_1) = f(y_2)$ alors

$$y_2 f(1) = f(f(y_2)) = f(f(y_1)) = y_1 f(1),$$

ce qui était demandé.

2. f est de valeurs strictement positives, en particulier $f(1)$ est non nul. D'après II.1, pour tous y_1 et y_2 réels strictement positifs, si $f(y_1) = f(y_2)$ alors

$$y_1 = \frac{y_2 f(1)}{f(1)} = y_2.$$

Donc f est injective.

3. D'après la condition (a) appliquée avec $(x, y) = (1, 1)$, $f(f(1)) = f(1)$, autrement dit 1 et $f(1)$ ont la même image par f . Or d'après II.2, f est injective, donc $f(1) = 1$.
4. D'après la condition (a) appliquée avec $x = 1$, pour tout y réel strictement positif, $f(f(y)) = yf(1)$ (comme dans la question II.2). D'autre part, $f(1) = 1$ d'après II.3. Donc pour tout y réel strictement positif, $f(f(y)) = y$, autrement dit, f est une involution de \mathbb{R}_+^\times .

5. D'après (a) et II.4,

$$f(ab) = f(af(f(b))) = f(a)f(b)$$

pour tous a et b strictement positifs. On a montré que f est un automorphisme du groupe \mathbb{R}_+^\times .

III. 1. D'après la condition (a) appliquée avec $x = y$, $f(xf(x)) = xf(x)$, donc $xf(x)$ appartient à F par définition de F .

2. D'après II.3, $f(1) = 1$ donc 1 est dans F par définition de F .

3. Soient x et y des éléments de F .

1ère méthode D'après la question II.5

$$f(xy) = f(x)f(y) = xy,$$

donc $xy \in F$. De plus $f(y)f(y^{-1}) = f(1) = 1$, donc

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = \frac{x}{y},$$

donc $x/y \in F$. C'est un fait général que l'ensemble des points fixes d'un endomorphisme forme un sous-groupe. Dans un espace vectoriel de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont de cette forme (ils ont des projecteurs associés).

2ème méthode

$$f(xy) \underset{y \in F}{=} f(xf(y)) \underset{(a)}{=} yf(x) \underset{x \in F}{=} yx = xy$$

et

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \underset{x \in F}{=} f\left(\frac{f(x)}{y}\right) \underset{(a)}{=} xf\left(\frac{1}{y}\right) \underset{y \in F}{=} \frac{x}{y},$$

donc xy et $\frac{x}{y}$ sont dans F .

4. Par récurrence sur n .

5. Récurrence

Initialisation: Pour $n = 0$ cela découle de III.2.

Hérédité: Supposons que $x^n \in F$ pour un certain $n \geq 0$. Alors $x^{n+1} = x \cdot x^n$ et nous savons que $x \in F$ et $x^n \in F$, donc d'après III.3, $x^{n+1} \in F$.

6. Soit x un élément de F . Supposons par l'absurde que $x > 1$. D'après III.4, pour tout entier naturel n , $f(x^n) = x^n$. Or d'autre part, pour tout entier naturel n , $x^n > 1$. D'après l'axiome d'Archimède il existe un entier naturel n_0 tel que $x^{n_0} > A$. Mais alors $f(x^{n_0}) > A$, ce qui contredit (b). C'est absurde.

7. Soit x un nombre réel strictement positif. D'après III.2 et III.3, si x est dans F alors x^{-1} aussi. D'après III.5, $x \leq 1$ d'une part, et $x^{-1} \leq 1$ d'autre part. Donc $x = 1$. On a vérifié que $1 \in F$ à la question III.2. Donc $F = \{1\}$.

8. Soit x un nombre réel strictement positif. D'après III.1, $xf(x) \in F$. Donc d'après III.6, $xf(x) = 1$, donc $f(x) = x^{-1}$.

IV. Vérifions que la fonction $i: \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ qui à x associe x^{-1} est solution :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\times, i(xi(y)) = \frac{1}{xy^{-1}} = yx^{-1} = yi(x).$$

C'est donc l'unique solution d'après la question III.6.

3.1. Compléments.

3.1.1. *Rapport de jury.* Le jury ne fait aucun commentaire sur ce problème.

3.1.2. *Équation fonctionnelle de Cauchy.* A la question **II.5** il a été établi que f vérifie $f(ab) = f(a)f(b)$. Quitte à poser $g = \ln \circ f \circ \exp$, cela équivaut à

$$(*) \quad g(x + y) = g(x) + g(y)$$

pour tous x et y réels.

Proposition 1. *Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle (*). Alors*

- (1) *Ou bien, g est linéaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda x$ pour tout nombre réel x ;*
- (2) *Ou bien, g n'est ni continue, ni monotone.*

Esquisse de démonstration. Posons $\lambda = g(1)$. Il s'agit de montrer que si g est continue ou monotone, g est linéaire. Pour cela, on commence par montrer en utilisant seulement (*), les faits suivants, dans l'ordre

- (i) $g(0) = 0$.
- (ii) g est impaire : pour tout réel x , $g(-x) = -g(x)$.
- (iii) Pour tout entier naturel n , $g(n) = \lambda n$.
- (iv) Pour tout entier relatif n , $g(n) = \lambda n$.
- (v) Pour tout nombre rationnel r , $g(r) = \lambda r$.

Si maintenant f est supposée continue, alors f est complètement déterminée par son image sur \mathbb{Q} . Donc $f(x) = \lambda x$ pour tout nombre réel x .

D'autre part, si f est supposée monotone, donnons-nous x un nombre réel et soient $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 0}$ deux suites adjacentes de nombres rationnels telles que $r_n \leq s_n$ pour tout entier naturel n et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que f est croissante. Pour tout entier naturel n ,

$$\lambda r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = \lambda s_n.$$

Les suites $(f(r_n))$ et $(f(s_n))$ sont donc adjacentes de limite commune $f(x) = \lambda x$. \square

La Proposition précédente suggère une manière alternative de résoudre le Problème à partir de la question **II.5**. Je la donne sous forme de questions ci-dessous.

1. Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) \leq 1$. *Indication* : on pourra, étant donné un éventuel x_0 tel que $f(x_0) > 1$, considérer la suite $(f(x_0^n))_{n \geq 0}$.
2. En déduire que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer à l'aide de l'équation fonctionnelle de Cauchy qu'il existe $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(x) = x^\alpha$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\alpha \in \{-1, 1\}$. Conclure.

Équations fonctionnelles à connaître. Outre les équations différentielles du premier ordre et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (qui forment un chapitre à elles seules), vous devez connaître les équations fonctionnelles de Cauchy et de l'exponentielle. Pour cette dernière, je conseille par exemple le texte de Daniel Perrin dans laquelle c'est le Théorème 3.3.

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/definition-exponentielle.pdf>

4. ÉPREUVE ÉCRITE 2018-2, PROBLÈME 2

Le sujet est disponible à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/EP2_2018_sujet.pdf.

4.1. **Partie A : Constructions à la règle et au compas.** L'énoncé demande de supposer que (O, I, J) est un repère **orthonormé**. Cependant, il n'est pas vraiment nécessaire que (O, I, J) soit orthonormé dans cette partie. Je ne le supposerai qu'à partir de la question **VI**, et seulement pour des raisons de commodité : à partir de la question **VI** il sera utile d'avoir un repère orthonormé sous la main (qu'on pourrait construire au besoin). Malgré tout, des résolutions différentes (inapplicables en général) peuvent être proposées si (O, I, J) est de plus supposé orthonormé ; je les décrirai le cas échéant, à la suite de la résolution générale.

I. On donne les programmes de constructions tels que dans une trace écrite dans un cahier de Sixième (pour **1** et **2**) ou de Cinquième (pour **3** et ⁸ **4**). On donne ensuite une justification des procédures de construction des questions **3** et **4**, qui n'est pas exigible en Sixième ; celle de la question **3** est en substance abordable en Cinquième. Les commentaires en italique ne font pas partie de la trace écrite.

1. Programme de construction :

- (1) À l'aide du compas pointé en A puis en B , tracer deux arcs de cercles de même rayon, qui se coupent. Nommer C l'intersection de ces deux arcs de cercle. *On prendra un écartement du compas ni trop grand, ni trop petit afin que cette intersection soit facile à marquer, l'écartement idéal étant d'environ les trois quarts de la longueur AB .*
- (2) A l'aide du compas pointé en A puis en B , tracer deux arcs de cercles de même rayon, ne passant pas par C , qui se coupent. Nommer C' leur intersection. *Même remarque qu'à la première étape. On fera en sorte que C et C' soient suffisamment éloignés, notamment en positionnant C et C' de part et d'autre de la droite (AB) , comme sur la Figure 4.*
- (3) Tracer la droite (CC') . C'est la médiatrice de $[AB]$.
- (4) Marquer le point où (CC') et $[AB]$ se coupent. C'est le milieu de $[AB]$.

2. Programme de construction :

- (1) A l'aide du compas pointé en C , tracer deux arcs de cercle de même rayon, qui coupent (AB) en deux points que l'on appelle A' et B' . *On prendra un écartement suffisamment grand pour que ces deux points soient assez éloignés l'un de l'autre.*
- (2) Répéter les étapes (2) et (3) du programme de construction de la médiatrice partant de A' et B' . *Le point C est déjà construit.* La droite (CC') est la perpendiculaire à (AB) passant par C .

3. Programme de construction :

- (1) A l'aide du compas pointé en A , prendre l'écartement correspondant à la longueur AB .

8. Sauf que les bissectrices ne sont actuellement plus au programme.

- (2) Pointer le compas en C , et tracer un arc de cercle. *Cet arc doit être tracé dans la direction approximative de la parallèle à (AB) , et le sens de A vers B .*
- (3) A l'aide du compas pointé en A , prendre l'écartement correspondant à la longueur AC .
- (4) Pointer le compas en B , et tracer un arc de cercle qui coupe le précédent. Nomer D l'intersection.
- (5) Tracer la droite (CD) . C'est la parallèle à (AB) passant par C .

Justification : (Voir la figure 8.) La construction s'appuie sur le fait que dans un quadrilatère, si les côtés opposés sont de même longueur, alors ils sont parallèles (et le quadrilatère en question est un parallélogramme). En effet, avec les notations précédentes, ABC d'une part et BCD d'autre part ont les longueurs de leurs côtés deux à deux égales ; ils sont donc égaux (isométriques) d'après le premier cas d'égalité des triangles. Il s'ensuit que $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. Or les angles \widehat{ABC} et \widehat{DCB} sont alterne-internes pour la sécante (BC) aux droites (AB) et (CD) . Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

Il existe un autre programme de construction, qui consiste à tracer deux perpendiculaires successives en utilisant la procédure de la question **I.2**. Cette manière de faire est plus longue mais tout aussi correcte.

4. Programme de construction :

- (1) À l'aide du compas, tracer un cercle de centre A , coupant \mathcal{D} et \mathcal{D}' en quatre points distincts. On nommera ces points P, Q, R, S dans l'ordre quand on parcourt le cercle.
- (2) En reproduisant les étapes (2) et (3) de la question **I.1**, tracer les médiatrices de $[PQ]$ d'une part et de $[QR]$ d'autre part. Ce sont les bissectrices de \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Justification : On prendra pour définition d'une bissectrice de \mathcal{D} et \mathcal{D}' , une droite dont tous les points sont équidistants de \mathcal{D} et de \mathcal{D}' . Dans la construction précédente, \mathcal{M} désigne la médiatrice de $[PQ]$ et \mathcal{M}' la médiatrice de $[RS]$. Soit K le milieu de $[PQ]$. D'après le cas côté-angle-côté d'égalité des triangles, les triangles PKA et QKA sont égaux. Donnons-nous maintenant M un point de \mathcal{M} , et supposons (sans perte de généralité) que M se situe sur la demi-droite $[OK)$. Soit U le projeté orthogonal de M sur (OP) et V le projeté orthogonal de M sur (AQ) . Les angles \widehat{MAU} et \widehat{MAV} sont égaux, donc les triangles rectangles MUA et MVA sont semblables ; de plus ils partagent leur hypoténuse MA , donc ils sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues MU et MV sont de même longueur, ce qu'il fallait démontrer.

- II.** Le nombre x est constructible par définition. Pour montrer que y est constructible, il suffit de montrer que le point de coordonnées $(y; y)$ (par exemple) est constructible. Construisons la parallèle \mathcal{H} à (OI) passant par J et la parallèle \mathcal{L} à (OJ) passant par I . Marquons $T(1; 1)$ leur intersection. La parallèle à (OI) passant par M coupe (OT) au point de coordonnées $(y; y)$.

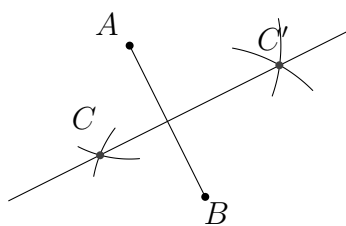


FIGURE 4. (I.1) Construction de la médiatrice de $[AB]$ à la règle et au compas.

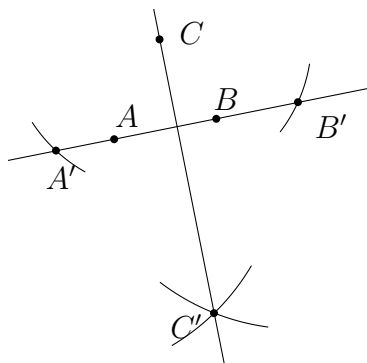


FIGURE 5. (I.2) Construction de la perpendiculaire à (AB) passant par C à la règle et au compas.

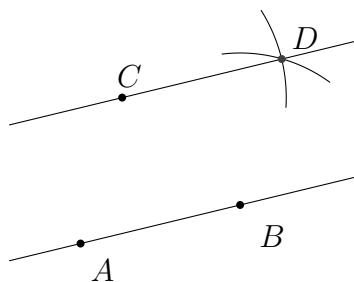


FIGURE 6. (I.3) Construction de la parallèle à (AB) passant par C à la règle et au compas.

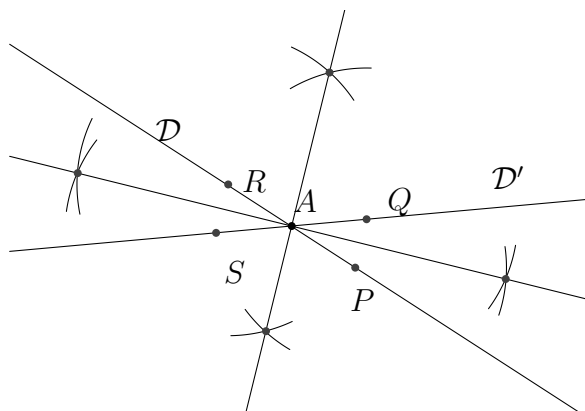


FIGURE 7. (I.4) Construction des bissectrices de \mathcal{D} et \mathcal{D}' à la règle et au compas.

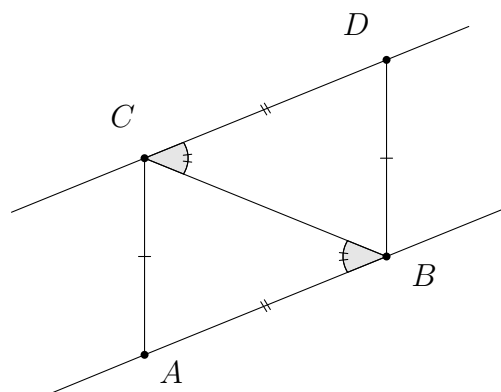


FIGURE 8. Justification de la procédure de construction de la parallèle à (AB) passant par C .

Résolution dans le cas où (O, I, J) est orthonormé : Le point de coordonnées $(y; y)$ est l'intersection de l'une des bissectrices de (OI) et (OJ) et de la perpendiculaire à (OJ) passant par M . Il est donc constructible d'après les questions **I.2** et **I.4**.

- III.** Soit y tel qu'il existe un point constructible M de coordonnées $(x; y)$. La parallèle à (OJ) passant par M intersecte (OI) au point de coordonnées $(x; 0)$. D'autre part, d'après la question **II**, le point M' de coordonnées $(x; x)$ est constructible. Il reste à construire la parallèle à (OI) passant par M' (c'est possible de nouveau d'après la question **I.3**), elle intersecte (OJ) au point de coordonnées $(0; x)$ qui est donc constructible.

Résolution dans le cas où (O, I, J) est orthonormé : D'après la question **I.2.**, les droites perpendiculaires à (OI) et à (OJ) passant par M' tel que défini plus haut sont constructibles à la règle et au compas. Or ces droites intersectent (OI) et (OJ) en les points de coordonnées $(x; 0)$ et $(0; x)$ respectivement. Donc ces points sont constructibles.

- IV. 1.** Nous allons construire le symétrique du point $M(x; 0)$ par rapport à O .
- (1) Tracer la droite (OI) .
 - (2) Placer la pointe du compas en O et prendre pour écartement la longueur OM .
 - (3) Tracer l'arc de cercle de rayon OM ; il intersecte (OI) au points M et M' . M' est le symétrique de M par rapport à O .
- 2.** Soient $M(x; 0)$ et $N(y; 0)$ deux points du plan repéré par (O, I, J) . Construisons le point $S(x + y; 0)$.
- (1) Tracer la droite (OI) .
 - (2) A l'aide du compas, prendre pour écartement la longueur ON .
 - (3) Pointer le compas en M , et tracer l'arc de cercle qui coupe (OI) du côté de M qui est celui de I par rapport à O . Marquer l'intersection S .
- Pour construire le point $D(x - y; 0)$ on reprend les deux premières étapes de la construction. La 3e étape est remplacée par

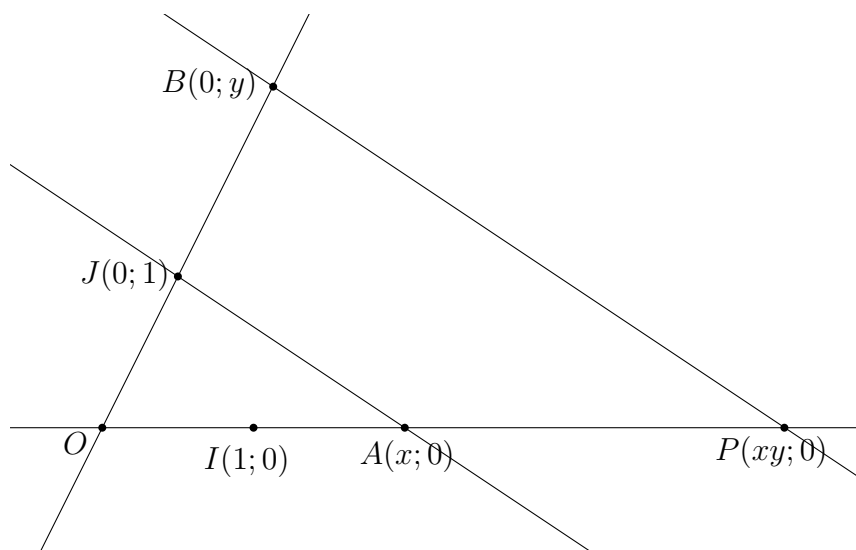


FIGURE 9. Construction du point P d'abscisse xy et d'ordonnée nulle à partir des points $A(x; 0)$ et $B(0; y)$.

(3') Pointer le compas en M , et tracer l'arc de cercle qui coupe (OI) du côté de M qui est celui de O par rapport à I . Marquer l'intersection D .

3. Soient $A(x; 0)$ et $B(0; y)$ deux points du plan repéré par (O, I, J) . Construisons le point $P(xy; 0)$.

(1) Tracer la droite (OI) .

(2) Tracer la droite (AJ) .

(3) Tracer la droite parallèle à (AJ) passant par B , en procédant comme dans la question **I.3**. Elle coupe (OI) en P ; marquer cette intersection.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}} = y,$$

donc $OP = y \cdot OA = xy$.

4. Soient $A(x; 0)$ et $B(0; y)$ deux points du plan repéré par (O, I, J) . Construisons le point $Q(xy; 0)$.

(1) Tracer la droite (OI) .

(2) Tracer la droite (AB) .

(3) Tracer la droite parallèle à (AB) passant par J , en procédant comme dans la question **I.3**. Elle coupe (OI) en Q ; marquer cette intersection.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OB}} = \frac{1}{y},$$

donc $OQ = OA \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$.

V. Sans perte de généralité on peut supposer que x et y sont non nuls. La construction de la question **IV.1** s'applique encore quand $x < 0$. D'après la question **IV**, $|x+y|$, $|xy|$ et $|x/y|$ sont constructibles. De plus, $|x| - |y|$ est constructible. Donc $x + y$, $x - y$, xy et x/y sont constructibles.

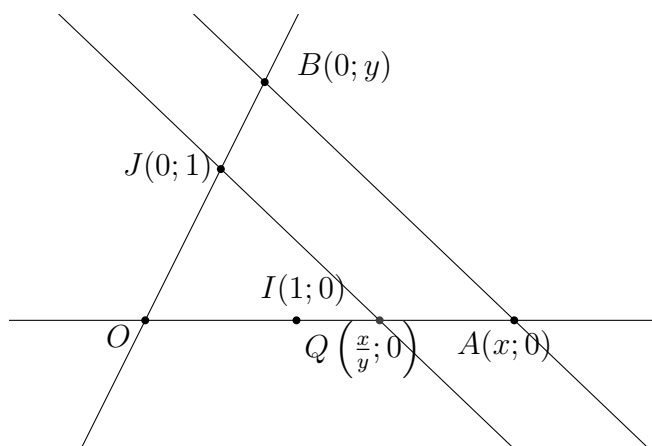


FIGURE 10. Construction du point Q d'abscisse x/y et d'ordonnée nulle à partir des points $A(x;0)$ et $B(0;y)$.

A partir d'ici, on supposera que (O, I, J) est orthonormé.

- VI.**
1. Le point $I(1;0)$ est constructible et le point $M(x;0)$ sont constructibles.
 2. O et A sont constructibles, donc C est constructible.
 3. C et D sont constructibles, donc B est constructible.
 4. D'une part, $\tan \theta = \frac{BI}{OI} = BI$. D'autre part $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{BI}{AI} = \frac{BI}{x}$. Or $\tan \theta \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$. Donc $BI \cdot BI/x = 1$. Donc $BI = \sqrt{x}$.
 5. D'après **VI.4**, le point $B(1; \sqrt{x})$ est constructible. Donc \sqrt{x} est constructible.
- VII.** Il est clair que 0 est constructible. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, n est constructible.

Initialisation: I est constructible, donc 1 est constructible.

Hérédité: Supposons que n est constructible. D'après **VI.1**, $1 + n$ est constructible.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, n est constructible : si $n \in \mathbf{N}$ c'est déjà montré, sinon $-n$ est constructible et cela résulte de la question **IV.1**. Finalement, d'après la question **V**, tout nombre rationnel est constructible.

- VIII.** 2 est constructible d'après la question **VII**. Donc $\sqrt{2}$ est constructible d'après la question **VI.5**. Puis, $\sqrt[4]{2}$ est constructible d'après la question **VI.5**. Pour la construction, on s'appuie sur la question **VI**.

4.2. Partie B : Polygones réguliers.

- IX.**
1. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^n = 1$. On pose $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho^n e^{in\theta} = 1$, donc $\rho^n = 1$ et $n\theta = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Donc, quitte à poser $\omega = e^{2\pi i/n}$,

$$z \in \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Réciproquement tous ces nombres sont solution.

2. Soit M_k le point d'affixe ω^k pour $k \in \llbracket 1, \dots, n-1 \rrbracket$. Montrons que $M_0 \dots M_{n-1}$ est un polygone régulier de centre O . Il s'agit de vérifier la définition donnée par l'énoncé.

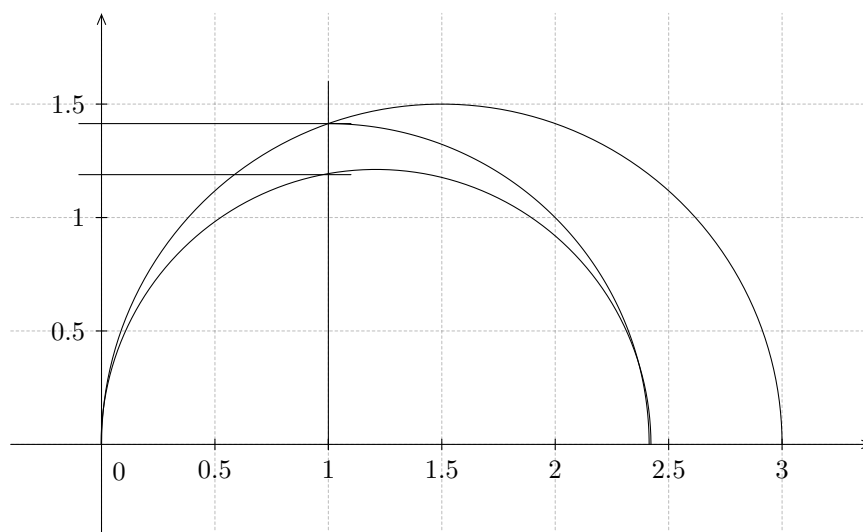


FIGURE 11. Construction de $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{2}$ à la règle et au compas.

- D'une part, pour tout k , $OM_k = |\omega^k| = |\omega|^k = 1$.
- D'autre part, avec la convention que $M_n = M_0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}} \right) \equiv \arg \frac{\omega^{k+1}}{\omega^k} \equiv \frac{2\pi}{n} \pmod{2\pi}.$$

3. Polygone régulier

X. 1. M_1 a pour coordonnées $(\cos(2\pi/n); \sin(2\pi/n))$.

2. M_1 est l'intersection du cercle de rayon 1 avec la perpendiculaire à (OI) passant par B .

XI. Si B est constructible à la règle et au compas, M_1 aussi d'après la question **X.2**. Donnons alors un protocole de construction pour M_2, \dots, M_{n-1} . Notons \mathbb{U} le cercle de centre O et de rayon 1. Pour k allant de 1 à $n-2$ dans cet ordre, on répète le procédé suivant.

(k) Le cercle de centre M_k passant par M_{k-1} coupe le cercle \mathbb{U} en deux points, qui sont M_{k-1} et M_{k+1} . Ainsi, M_{k+1} est constructible à partir de la donnée de M_{k-1} et de M_k .

XII. Si $n = 3$ alors B est le point d'affixe $-1/2$. Si $n = 4$ alors B est le point O . Si $n = 6$ alors B est le point d'affixe $1/2$ et M_1 le point de coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

XIII. 1. D'après la formule d'Euler, $\alpha = 2 \cos(2\pi/5)$.

2. Calculons :

$$(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 1 - \omega^5 = 0.$$

Donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

3. Etant donné que ω est de module 1 et que $\omega^5 = 1$, $\omega^4 = \omega^{-1} = \bar{\omega}$. Donc $\alpha = \omega^4$. Puis

$$\alpha^2 = (\omega + \omega^4)^2 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8 = \omega^2 + \omega^3 = 2.$$

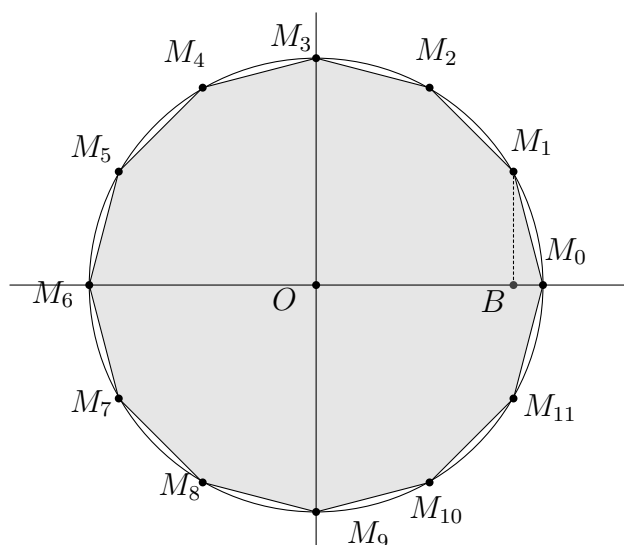


FIGURE 12. Le dodécagone régulier.

4. D'après les question **XIII.3** et **XIII.2**,

$$\begin{aligned} -1 + \alpha + \alpha^2 &= -1 + \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 + 2 \\ &= -1 + 1 + 1 + \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que α est la solution positive de l'équation $-1 + x + x^2 = 0$; puis que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

5. B est constructible donc d'après la question **XI**, M_0, \dots, M_4 le sont aussi.

XIV. 1. D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle BOJ rectangle en O , $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$. D'après la question **XIII**, D a pour affixe $\cos(2\pi/5)$.

2. On a représenté la construction de $M_0M_1M_2M_3M_4$ sur la Figure 13.

4.3. Compléments.

4.3.1. *Extraits du rapport de jury. Ces deux problèmes⁹ pouvaient permettre d'apprécier, outre les qualités scientifiques des candidats, leur aptitude à se placer dans une optique professionnelle, notamment avec des références explicites [...] à une classe de collègue (problème 2, IV).*

Les définitions (point constructible, nombre constructible, polygone régulier) n'ont pas été bien lues et assimilées par les candidats. Lorsqu'elles semblent avoir été lues, les candidats ne les utilisent pas à bon escient. En particulier, beaucoup de candidats n'ont pas compris ce que le jury attendait d'eux : la constructibilité d'un point n'est que très rarement justifiée à partir, le cas échéant, de points déjà construits. Aussi, même si les programmes de construction sont correctement rédigés, les candidats ne démontrent que très rarement que les constructions qu'ils proposent correspondent

9. NdR : les problèmes 1 et 2 de l'épreuve écrite 2.

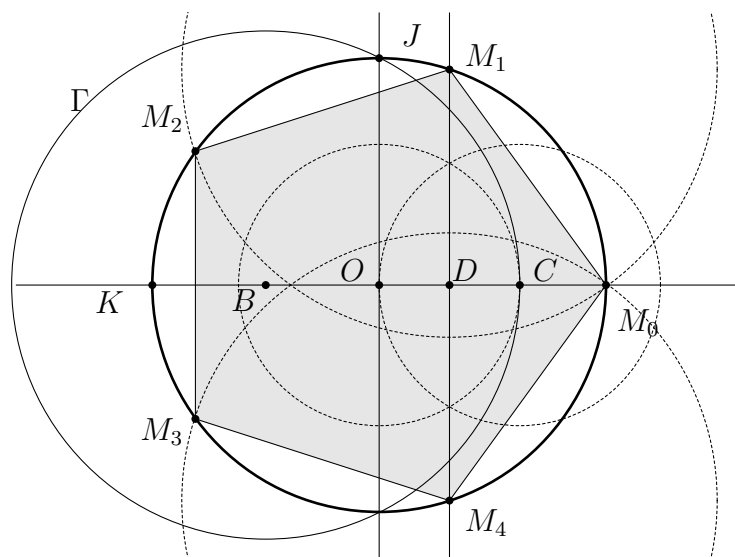


FIGURE 13. Construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

aux objets géométriques demandés. Les constructions géométriques sont très mal réalisées ; beaucoup de candidats ne semblent pas avoir à leur disposition leur matériel de géométrie (règle, compas).

De nombreux candidats ont confondu le point de coordonnées $(x; 0)$ et le réel x . Les notations de géométrie élémentaire ne sont pas maîtrisées : point, segment, demi-droite, droite, longueur.

Le théorème de Thalès est bien utilisé (A.IV.3).

Les calculs sur les nombres complexes sont très diversement maîtrisés. Peu de candidats se montrent capables de résoudre l'équation $z^n = 1$. Beaucoup se contentent de donner les solutions $e^{2ik\pi/n}$ sans faire la résolution, ni même préciser les valeurs possibles pour k . Enfin, la somme des racines n -ièmes de l'unité (dans le problème, n était égal à 5) ne semble pas être un résultat connu.

La réussite aux épreuves écrites nécessite que la préparation des candidats prenne en compte les éléments suivants :

- maîtriser et énoncer avec précision, lorsqu'elles sont utilisées, les connaissances mathématiques de base, indispensables à la prise de recul sur les notions enseignées ;
- rédiger clairement et de manière rigoureuse une démonstration simple, ce qui est une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ;
- exposer avec toute la précision voulue, en mentionnant clairement les étapes successives, les raisonnements, plus particulièrement ceux qui relèvent du collège ou du lycée.

On rappelle aussi l'importance du respect des notations, de la nécessité de conclure une argumentation, mais aussi l'intérêt de la lisibilité d'une copie.

4.3.2. *Des médiatrices et des bissectrices.* On rappelle la définition géométrique (qui est celle du cahier de cours au collège) et la définition ensembliste, ou par les distances (qui est vue comme une propriété, ou comme une seconde caractérisation).

Définition « constructiviste »	Définition « ensembliste »
La médiatrice du segment $[AB]$, c'est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par le milieu de $[AB]$.	La médiatrice de $[AB]$, c'est l'ensemble des points équidistants de A et de B .
La bissectrice du secteur angulaire délimité par $[OA)$ et $[OB)$, c'est la demi-droite qui partage ce secteur angulaire en deux secteurs angulaires égaux (ou de même angle).	La bissectrice du secteur angulaire délimité par $[OA)$ et $[OB)$, c'est l'ensemble des points du secteur angulaire (au sens ensembliste) qui sont équidistants de $[OA)$ et de $[OB)$.

La définition ensembliste est celle qui permet de montrer le plus directement que les médiatrices, resp. les bissectrices sont concourantes au centre du cercle circonscrit, resp. au centre du cercle inscrit.

4.3.3. *Propriétés des parallélogrammes.* A la justification de la question **I.3** on est passé de l'une à l'autre des caractérisations du parallélogramme. Rappelons-les sans démonstration.

Proposition. *Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. S'équivalent*

- (1) *Les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur (c'est-à-dire, $AB = CD$ et $BC = DA$).*
- (2) *Les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles.*
- (3) *$ABCD$ possède une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur.*
- (4) *Les diagonales de $ABCD$ s'intersectent en leurs milieux.*

Cette proposition se démontre à plusieurs niveaux, et les démonstrations sont toujours très instructives. L'équivalence entre (1) et (2) est équivalente à la propriété des angles alternes-internes et sa réciproque via le second cas d'égalité des triangles. L'équivalence entre (3) et (4) est quant à elle équivalente à la propriété des angles opposés par le sommet via le premier cas d'égalité des triangles. L'implication ((1) et (2)) \implies (3) est une affaire de logique, tandis que sa réciproque (3) \implies ((1) et (2)) est une petite joie du calcul vectoriel : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}.$$

Finalement, (4) admet une autre formulation : les parallélogrammes sont exactement les quadrilatères à symétrie centrale.

4.3.4. *Une jolie construction du dodécagone régulier.* Elle est décrite sur la Figure 14. $ABCD$ est un carré, ABK , BCL , CDM et DAN sont des triangles équilatéraux de sorte que K , L , M et N sont intérieurs à $ABCD$.

Proposition. *Sous les hypothèses ci-dessus, les milieux de AN , ND , DM , MC , CL , LB , BK , KA , MN , NK , KL et LM forment les sommets d'un dodécagone régulier.*

Démonstration. Notons $A_0A_1B_{-1}B_0B_1C_{-1}C_0C_1D_{-1}D_0D_1A_{-1}$ le dodécagone en question, et soit O le milieu de $ABCD$. Soient a, b, c, d, \dots les affixes respectives des

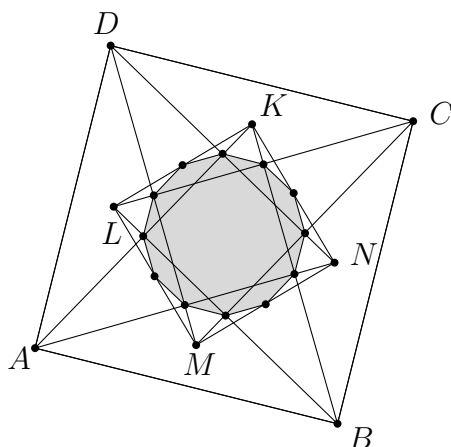


FIGURE 14. Une construction originale du dodécagone régulier

points A, B, C, D, \dots dans le plan centré en O rapporté au plan complexe de sorte que $c = 1$ et $d = i$. Posons

$$\rho = e^{2i\pi/6} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Quelques calculs donnent successivement

$$\begin{aligned} k &= b + \rho(b - a) = -1 + \rho(1 - i) \\ &= -1 + \sqrt{2}e^{i\pi/3 - i\pi/4} = -1 + \sqrt{2}e^{i\pi/12}; \\ a_{-1} &= \frac{a + k}{2} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/12}; \\ c_1 &= -\bar{a}_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/12}. \end{aligned}$$

À ce stade, en utilisant que $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ avec $\theta = \pi/6$, puis la formule d'Euler,

$$e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}i = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}i,$$

donc

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}i \right) = 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}e^{i\pi/6}. \end{aligned}$$

D'autre part $c_0 = \frac{1}{2}(k + n) = \operatorname{Re}(k) = -1 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, puis $d_0 = ic_0$, $a_0 = -c_0$, $b_0 = -ic_0$, $d_1 = \frac{c_1}{c_0}d_0 = e^{4 \cdot 2i\pi/12}c_0$, $a_1 = \frac{c_1}{c_0}a_0 = e^{7 \cdot 2i\pi/12}c_0$, $b_1 = \frac{c_1}{c_0}b_0 = e^{10 \cdot 2i\pi/12}c_0$, $c^{-1} = \bar{c}_1$, $b_{-1} = \bar{d}_1$, $a_{-1} = \bar{a}_1$ and $d_{-1} = \bar{b}_1$. Cela démontre que $A_0A_1B_{-1}B_0B_1C_{-1}C_0C_1D_{-1}D_0D_1A_{-1}$ est un dodécagone régulier. \square

3 ($k = 0$)	8	16	30	48	68
4	10	17 ($k = 2$)	32	51	80
5 ($k = 1$)	12	20	34	60	85
6	15	24	40	64	96

TABLE 1. Les nombres n entre 3 et 99 tels que n -gone régulier est constructible à la règle et au compas.

4.3.5. *Pour aller un peu plus loin.* Un ouvrage pour vous. *Théorie des corps : La règle et le compas*, J.-C. Carréga, (Hermann, 2001, Collection formation des enseignants). Il y est notamment montré que la trisection de l'angle et la duplication du cube ne sont pas possible à la règle et au compas, ce qui contrairement à la preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle avec ces mêmes outils, est de nos jours plutôt accessible (j'insiste!).

La « reconstruction » des opérations menée dans la question **IV** fait partie d'une équivalence profonde entre la théorie des plans affines que vous avez étudiée au collège et celle des corps que vous avez étudiée au premier cycle universitaire. Expliciter cette équivalence n'est pas un objectif de la préparation au CAPES ; cependant il est bon de savoir qu'elle existe, afin de réconcilier ces deux points de vue : ce que vous savez de la géométrie affine depuis le collège, et ce qu'on vous apprend à l'université.

4.3.6. *Constructions à la règle trop courte et au compas à ouverture limitée.* Dans nos constructions la règle et le compas sont toujours supposés idéaux : la règle est infiniment longue et le compas peut être d'un écartement arbitrairement petit ou arbitrairement grand. Que se passe-t-il avec une règle trop petite et un compas d'ouverture limitée ? On pourra consulter l'article de X. Caruso qui répond à ces questions.

<https://xavier.caruso.ovh/papers/publis/tropetit.pdf>

4.3.7. *Sur la constructibilité des n -gones.* On peut montrer que le n -gone régulier est constructible si et seulement si c'est le produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat distincts (on dit que p est un nombre premier de Fermat s'il est premier et de la forme $2^{2^k} + 1$ pour un certain $k \geq 0$).

Les 24 valeurs de n comprises entre 3 et 99 pour lesquelles le n -gone régulier est constructible sont renseignées dans le Tableau 1. On peut observer qu'elles sont de plus en plus espacées. Les nombres de Fermat sont en gras, suivis de la valeur de k correspondante.

On attribue généralement à Gauss (alors âgé de 19 ans) la construction du 17-gone régulier, ce qui équivaut à l'expression de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{16}.$$

4.3.8. *Le 96-gone et la méthode d'Archimède.* Un fait de gloire d'Archimède est d'avoir détenu la meilleure approximation de π de l'Antiquité grecque. Je vous conseille à ce sujet le document ressource suivant.

$223/71$	3,14084507042
$96 \sin(\pi/96)$	3,14103195089
π	3,14159265359
$96 \tan(\pi/96)$	3,14271459965
$22/7$	3,14285714286

TABLE 2. Encadrement de π par la méthode d'Archimède.

https://media.eduscol.education.fr/ftp_eduscol/2019/Ressources/Mathematiques/RA19_Lycee_G_1_MATH_Algorithmique_et_Programmation_activite_10.html

Concrètement, Archimède a mesuré les périmètres d'un n -gone inscrit et exinscrit du cercle, pour $n = 96$ (la plus grande valeur de la table précédente, et celle de la dernière colonne pour laquelle la construction est la moins difficile). On montre en effet (à l'aide du théorème de l'angle au centre) que le périmètre du n -gone inscrit du cercle de diamètre 1 est $n \sin(\pi/n)$ et celui du polygone exinscrit est $n \tan(\pi/n)$.

On omet en revanche souvent de signaler que l'encadrement de π qui est obtenu par cette méthode est un encadrement par des nombres *constructibles*, *mais pas rationnels*. Le problème qui se pose dès lors est en fait un problème d'approximation diophantienne : l'approximation par des rationnels de ces nombres constructibles, par excès ou par défaut. Les bornes que l'on retient d'Archimède sont $223/71 < \pi < 22/7$. Les voici sous forme décimale, comparées au périmètres des polygones considérés par Archimède, ainsi qu'à la valeur approchée de π .

La méthode d'Archimède n'est pas la plus précise ni la plus ingénieuse de l'Antiquité. Au IIIe siècle après J.-C., Liu Hui a conçu une méthode lui demandant seulement de construire un 96-gone et à l'aide de considérations sur les aires, d'estimer π à $3927/1250 = 3,1416$, et, au Ve siècle, l'astronome Zhu Chongzhi estima π à $355/113 \approx 3.1415929$, un record qui devait tenir près de neuf cent ans.

4.3.9. *La constructibilité au sens des origamis.* Les constructions par origami permettent de construire tous les nombres constructibles à la règle et au compas, mais aussi d'autres. En particulier la trisection de l'angle (Figure 15) et la duplication du cube sont possibles ! Pour une introduction bien écrite, voir *Solving Cubics With Creases : The Work of Beloch and Lill* par Thomas C. Hull (*American Math Monthly*, April 2011). Dans les énoncés suivants, on désigne par μ_x le polynôme minimal de x (à coefficients dans \mathbf{Q}).

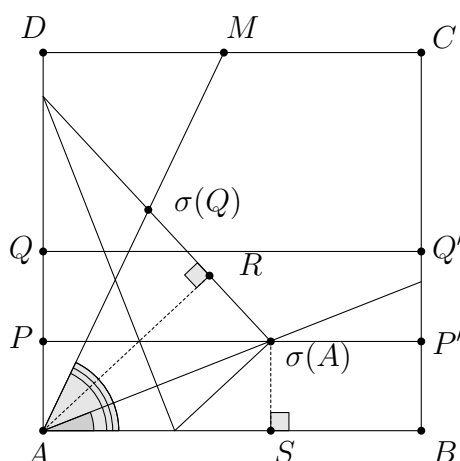


FIGURE 15. Une trisection de l'angle \widehat{BAM} par origami. La feuille d'origami est le carré $ABCD$. On commence par faire le pli selon $[PP']$ parallèle à AB qui envoie A sur Q et B sur Q' (on laisse à la lectrice l'exercice qui consiste à comprendre comment faire un pli parallèle à un côté ; la longueur AP n'importe pas). Puis on fait le pli σ qui envoie Q sur $[AM]$ et A sur $[PP']$. Alors les triangles $AR\sigma(Q)$, $AR\sigma(A)$ et $AS\sigma(A)$ sont égaux.

Théorème 1 (Constructibilité à la règle et au compas). *Soit x un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) x est constructible à la règle et au compas.
- (2) $\deg \mu_x = 2^s$ pour un certain $s \geq 0$.

Si, de plus, $x = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour un certain $n \geq 3$, alors les conditions suivantes sont équivalentes à

$$n = 2^t p_1 \cdots p_d$$

où les p_i sont premiers, distincts, et il existe r_i tel que $p_i - 1 = 2^{r_i}$ pour tout i .

Théorème 2 (Constructibilité par origami). *Soit x un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) x est constructible par origami (sans plis simultanés).
- (2) $\deg \mu_x = 2^r 3^s$ pour certains $r, s \geq 0$

Si, de plus, $x = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour un certain $n \geq 3$, alors les conditions suivantes sont équivalentes à

$$n = 2^u 3^v p_1 \cdots p_d$$

où les p_i sont premiers, distincts, et il existe r_i, s_i tels que $p_i - 1 = 2^{r_i} 3^{s_i}$ pour tout i .

(On peut montrer que si p est premier et $p - 1$ une puissance de 2, alors p est un nombre de Fermat ; mais j'ai préféré garder la forme ci-dessus pour aider la comparaison.) Dans les deux théorèmes le sens (2) implique (1) peut se démontrer à l'aide de la théorie de Galois ; dans le cas origami, il faut montrer en outre que tous les groupes d'ordre $2^r 3^s$ ont la propriété dite d'être résoluble (ce qui demande un peu plus de théorie des groupes que dans le cas de la règle et du compas seuls).

5. ÉPREUVE ÉCRITE 2021-1

Le sujet est disponible à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep1_2021.pdf.

5.1. Etude des nombres harmoniques.

I. Soit k un entier naturel tel que $k \geq 2$.

— D'une part, pour tout $x \in [k; k+1]$, nous avons que $1/x \leq 1/k$.

— D'autre part, pour tout $x \in [k-1; k]$, nous avons que $1/k \leq 1/x$.

Par **positivité de l'intégrale**, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$ d'une part, et $\int_k^{k+1} \frac{dx}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ d'autre part. Or $\int_k^{k+1} dx/k = 1/k$. Donc :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}.$$

II. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. D'après la question **I**,

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}.$$

D'après la relation dite de Chasles pour le calcul intégral, et vue la définition de H_n fournie par l'énoncé, ceci se réécrit

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x}.$$

Notons $i:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto 1/x$. La fonction \ln est une primitive de i . Donc les inégalités précédentes sont équivalentes à $\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n)$, c'est-à-dire

$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

Or $-\ln 2 + 1 \geq 0$, donc

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

*On pouvait aussi établir l'inégalité de gauche dans la question **I** pour $k = 1$, et sommer cette inégalité de $k = 1$ à $k = n$ pour obtenir l'inégalité de gauche sans utiliser le fait que $\ln 2 \leq 1$.*

III. 1. Nous savons que la suite $(\ln(n+1))_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$. D'après la question **II**, (H_n) est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$, donc (H_n) diverge vers $+\infty$.

2. Rappelons que la fonction \ln est positive et croissante sur $[2; +\infty[$, et tend vers l'infini de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/\ln n = 0$. Pour tout $n \geq 2$, d'après la question 2,

$$1 \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq H_n \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n} = 1 + 1/\ln n.$$

D'après le théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n/n = 1$, autrement dit H_n admet $\ln n$ pour équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

IV. 1. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq 0, \end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale (ou encore d'après la question I avec k valant $n+1$). D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= H_{n+1} - H_n + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} \geq 0, \end{aligned}$$

toujours par positivité de l'intégrale. Donc (u_n) est décroissante tandis que (v_n) est croissante. De plus, pour tout $n \geq 1$

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n$$

qui est le terme général d'une suite de limite nulle. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Les suites adjacentes convergent vers une limite commune. La suite (v_n) est positive, donc $\gamma \geq 0$.

V. 1. La suite (u_n) est décroissante, donc $u_n \geq \gamma$ pour tout n . De plus $u_n - \gamma \leq u_n - v_n$ pour tout $n \geq 1$ étant donné que les suites u et v sont adjacentes. Donc

$$0 \leq u_n - \gamma \leq \ln(1 + 1/n).$$

2. Notons que $\ln(1 + 1/n) \leq 1/n$, d'après l'inégalité $\log(1+r) \leq r$, qui est bien adaptée quand $n \rightarrow +\infty$. On peut s'en servir pour stopper l'exécution à partir du rang n_0 minimal où $1/n_0 \leq \varepsilon$. Voici une implémentation en Python.

```

1 from math import log as ln
2 def eval_gamma(epsilon):
3     harm = 0
4     k = 0
5     while k*epsilon < 1:
6         k=k+1
7         harm = harm+1./k
8     return harm - ln(k)
```

Entrée: $\varepsilon \in]0; 1]$
Sortie: $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}$ tel que $|\hat{\gamma} - \gamma| \leq \varepsilon$
 $k \leftarrow 0$ et $H \leftarrow 0$
tant que $\varepsilon k < 1$ **faire**
 $k \leftarrow k + 1$
 $H \leftarrow H + 1/k$
fin tant que
retourne $H - \ln k$

Quelques résultats

```

>>> eval_gamma(0.1)
0.6263831609742081
>>> eval_gamma(0.01)
0.5822073316515279
>>> eval_gamma(0.001)
0.5777155815682056
```

5.2. Le problème de Bâle.

VI. Pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 2, nous avons que

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}.$$

VII. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, soit $\widehat{B}_n = \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$. Nous avons que

$$B_n \leq 1 + \widehat{B}_n = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite (B_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

VIII. 1. Pour tout θ réel, nous avons que $2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. Donc pour tous n, t

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + \sum_{j=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) = D_n(t).$$

2. On suppose ici $t > 0$. D'après la formule déterminant la somme d'une série géométrique non constante à valeurs complexes,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} &= e^{-int} \sum_{j=0}^{2n} e^{ijt} = e^{-int} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= e^{-int} \frac{e^{i(n+1/2)t} e^{-i(n+1/2)t} - e^{i(n+1/2)t}}{e^{it/2} e^{-it/2} - e^{it/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

3. D'après la définition de $D_n(t)$,

$$D_n(0) = 2n + 1.$$

D_n (le plus souvent divisé par 2π) est appelé noyau de Dirichlet.

IX. 1. La fonction \sin est continue et strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}]$, donc f est continue sur $]0; \pi/2]$. Il reste à établir que $t/\sin(t)$ admet pour limite 1 quand t tend vers 0. Pour cela notons que \sin est dérivable en 0, de dérivée $\cos(0) = 1$, donc $\lim_{t \rightarrow 0} t/\sin(t) = 1$.

2. D'après le **théorème de prolongement de la dérivée**, il suffit de vérifier que $f'(t)$ (bien définie pour $t \in]0; \pi/2]$ car f est quotient de fonctions dérivable ne s'annulant pas) admet une limite finie quand $t \rightarrow 0$. Calculons : pour tout $t \in]0; \pi/2]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{t + \mathcal{O}(t^3) - t(1 + \mathcal{O}(t^2))}{t^2 + \mathcal{O}(t^4)} \\ &= \frac{\mathcal{O}(t^3)}{t^2(1 + \mathcal{O}(t^2))} \\ &= \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

Donc f' admet une limite nulle en 0.

3. On a vu que f' est continue en 0. D'autre part, sur $]0, \pi/2]$, f est quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui ne s'annulent pas, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; \pi/2]$. Conclusion, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi/2]$.

X. 1. Remarquons préliminairement que $\sin(kt) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Pour $t \in [0, \pi]$, posons $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v(t) = \frac{\cos(kt)}{k^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt &= [u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi u'(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} - [u'(t)v(t)]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi u''(t)v(t) dt \end{aligned}$$

Or $[u(t)v'(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ et $\int_0^\pi u''(t)v(t) dt = \left[\frac{\sin(kt)}{\pi k^3} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$ d'après notre remarque préliminaire. Donc

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\cos kt}{k^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{k^2}.$$

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. D'après la définition de D_n et la question précédente,

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. Or d'après la question **VIII** nous avons que $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{D_n(t)-1}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt.$$

3. Calculons :

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

4. Ceci découle de la linéarité de l'intégrale et des questions **X.2** et **X.3** :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt - \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) + \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \frac{D_n(t) - 1}{2} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

5. On utilise l'expression de $D_n(t)$ trouvée à la question **VIII**. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(s - \frac{s^2}{2\pi} \right) D_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(s - \frac{s^2}{2\pi} \right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} ds \end{aligned}$$

Puis on fait le changement de variables $s = 2t$ dans l'intégrale précédente, t variant dans $[0; \pi/2]$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} - B_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(s - \frac{s^2}{2\pi} \right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(2t - \frac{4t^2}{2\pi} \right) \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} 2dt \\ &= \int_0^{\pi/2} t \left(2 - \frac{2t}{\pi} \right) \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt. \end{aligned}$$

XI. Pour $t \in [0; \pi/2]$, posons

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi} \right) & t \in]0; \pi/2[\\ 2 & t = 0 \end{cases}$$

Alors $g(t) = f(t)(2 - 2t/\pi)$ et donc g est de classe \mathcal{C}^1 . D'après la question précédente,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

XII. D'après la question **X.**, g et g' sont continues donc bornées sur $[0; 2\pi]$, disons par M et M' respectivement. Pour tout $n \geq 1$, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt = \left[-g(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} g'(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} dt.$$

En appliquant **l'inégalité triangulaire intégrale**, on obtient que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt \right| &\leq \frac{2M}{2n+1} + \int_0^{\pi/2} \frac{M'}{2n+1} dt \\ &\leq \frac{4M + \pi M'}{4n+2}, \end{aligned}$$

de limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt = 0.$$

XIII. D'après les questions **XI** et **XII**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi^2/6 - B_n) = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.3. Les lois géométriques. Voir aussi l'épreuve **2019-1, problème 2, partie A.**

XIV. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \geq 1$,

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x},$$

ce qui revient à dire que la série de terme général x^k converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = (1-x)^{-1}$.

XV. Nous donnons deux procédures pour cette question, **(a)** et **(b)** ci-dessous. La procédure attendue est la première. La seconde est plus élémentaire, mais aussi plus fastidieuse.

(a) Pour tout entier naturel k , introduisons la fonction

$$g_k:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k.$$

Pour tout k , g_k est de classe de classe \mathcal{C}^∞ , et pour tout entier naturel j , pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$g_k^{(j)}(x) = k(k-1) \cdots (k-j+1)x^{k-j}$$

ainsi qu'on le démontrerait par récurrence sur j .

Soit $R \in]0; 1[$. D'après le théorème de domination des polynômes par les exponentielles, pour tout entier naturel j nous avons que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{j+2} R^{k-j} = 0.$$

Donc la série de terme général $g_k^{(j)}(R)$ converge, d'après le **critère de Riemann**. De plus, pour tout $x \in [-R; R]$ nous avons que $|g_k^{(j)}(x)| \leq g_k^{(j)}(R)$. Donc la série de fonction $g_k^{(j)}$ est **normalement convergente** sur $[-R; R]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$$

définit une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur tout $[-R; R]$, donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1; 1[$. En particulier, et c'est ce qui nous intéresse, si l'on note g la somme alors pour tout entier naturel j ,

$$\forall x \in]-1; 1[, g^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(j)}(x) \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-j+1)x^{k-j}.$$

D'après la question **XIV** nous savons que $g(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout x . Appliquant l'identité précédente pour $j = 1$ et $j = 2$, nous trouvons que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(b) Calculons, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - 2 \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)x^{k-1} + \sum_{k=3}^{n+2} (k-2)x^{k-1} \\ &= \sum_{k=3}^n (k - 2(k-1) + (k-2))x^{k-1} \\ &\quad + 1 + 2x - 2x - 2nx^n + (n-1)x^n + nx^{n+1} \\ &= 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} nx^{n+1} = 0$, donc la série de terme général kx^{k-1} est convergente pour tout $x \in]-1; 1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De même, pour tout $x \in]-1; 1[$ et n entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} (1-x)^3 \sum_{k=1}^n k(k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} - 3 \sum_{k=3}^{n+1} (k-1)(k-2)x^{k-2} \\ &\quad + 3 \sum_{k=4}^{n+2} (k-2)(k-3)x^{k-2} - \sum_{k=5}^{n+3} (k-3)(k-4)x^{k-2} \\ &= 2 + (6 - 3 \cdot 2)x + (12 - 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2)x^2 + \sum_{k=5}^n Q_k x^{k-2} \\ &\quad + R_n(x) \\ &= 2 + \sum_{k=5}^n Q_k x^{k-2} + R_n(x), \end{aligned}$$

où

$$Q_k = k(k-1) - 3(k-1)(k-2) + 3(k-2)(k-3) - (k-3)(k-4)$$

pour tout $k \in \llbracket 5; n \rrbracket$ et $R_n(x) = \mathcal{O}(nx^{n-1})$. Or, pour tout entier naturel $k \geq 5$,

$$\begin{aligned} Q_k &= k(k-1) - 3(k-1)(k-2) + 3(k-2)(k-3) - (k-3)(k-4) \\ &= k^2 - k - 3(k-1)^2 + 3(k-1) + 3(k-2)^2 - 3(k-2) - (k-3)^2 + k - 3 \\ &= (1 - 3 + 3 - 1)k^2 + (-1 + 6 - 3 - 12 + 3 + 6 + 1)k - 3 - 3 + 12 + 6 - 9 - 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $(1-x)^3 \sum_{k=1}^n k(k-1)x^{k-2} = 2 + \mathcal{O}(nx^{n-1})$. On en déduit l'identité recherchée quand $n \rightarrow +\infty$.

XVI. D'après la question **XIV**,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-1+p)} = 1.$$

XVII. Par définition de l'espérance, et sous réserve *a priori* de son existence et de sa finitude,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p},$$

où nous avons utilisé successivement la définition de p_k et la première identité de la question **XVI**, applicable ici car $p \in]0; 1[$ de sorte que $1-p \in]-1; 1[$. Par définition de la variance, et sous réserve *a priori* de son existence et de sa finitude,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Nous sommes donc ramenées à montrer l'existence et la finitude de $\mathbb{E}(X^2)$, puis à la déterminer. Allons-y : si elle existe,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2p(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1) + k)(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Or, étant donné que $1-p \in]-1; 1[$ nous savons que $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} = \frac{2(1-p)}{(1-1+p)^3}$ d'une part et $\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = 1/p^2$ d'autre part, grâce à la question **XVI**; en particulier, nous savons que ces séries sont convergentes. Donc $\mathbb{E}(X^2)$ existe, est finie, et

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p) + p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Finalement

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

comme demandé.

XVIII. 1. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

où l'on a utilisé le résultat de la question **XVII** pour écrire que $\mathbb{E}(X_i) = 1/p_i$ pour tout i .

2. Puisque les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i},$$

où l'on a utilisé le résultat de la question **XVII** pour écrire que $\mathbb{V}(X_i) = 1/p_i^2 - 1/p_i$ pour tout i .

5.4. **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.** Voir aussi l'épreuve 2020-2, partie E.

XIX. Inégalité de Markov. Pour tout $a \in]0; +\infty[$, nous avons :

$$a\mathbb{P}(Y \geq a) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Y \geq a} a d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Y),$$

d'où l'inégalité souhaitée en divisant les deux membres de cette inégalité par a .

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $a \in]0; +\infty[$, nous avons :

$$a^2\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a} a^2 d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2 d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{V}(X).$$

d'où l'inégalité souhaitée en divisant les deux membres de cette inégalité par a^2 .

5.5. **Le problème du collectionneur.**

XXI. La collection est complète quand le collectionneur possède n animaux. Donc il s'agit de la variable aléatoire T_n .

XXII. $T_1 = 1$ avec probabilité 1.

XXIII. 1. Cette probabilité est égale à $\frac{1}{n^{q-1}}$.

2. L'événement « $T_2 > q$ » est exactement l'événement dont on a calculé la probabilité à la question précédente, car devoir attendre un temps strictement supérieur à q pour avoir deux animaux, c'est avoir tiré toujours le même animal au cours des q premiers achats. Donc d'après la question **XXII.1**,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. Pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = \mathbb{P}(T_2 > k-1) - \mathbb{P}(T_2 > k) = \frac{1}{n^{k-2}} - \frac{1}{n^{k-1}}$$

et $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 0$ car pour obtenir deux animaux il faut effectuer au moins deux achats.

4. Soit q_{\min} ce nombre minimal d'achat. Par définition, q_{\min} est l'entier minimal parmi les entiers q tels que

$$\mathbb{P}(T_2 > q) \leq 0,01.$$

D'après la question **XXIII.2**, si $n = 100$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 > 1) &= 1 \\ \mathbb{P}(T_2 > 2) &= 1/100. \end{aligned}$$

Donc $q_{\min} = 2$.

5. Par définition, Z_k est le temps d'attente entre l'obtention du $(k-1)^e$ animal au temps T_{k-1} et du k^e animal au temps T_k . Si l'on pose $T_0 = 0$ avec probabilité 1, alors pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Z_k = T_k - T_{k-1}$. Nous en déduisons l'expression demandée par l'énoncé.

6. Par récurrence sur l'entier naturel non nul k , montrons que

$$T_k = \sum_{i=1}^k Z_i.$$

Initialisation: $T_1 = Z_1$ d'après la question **XXIII.5**.

Hérédité: soit $k \geq 1$ un entier naturel. Supposons $T_k = \sum_{i=1}^k Z_i$. Alors d'après la question **XXIII.5**, $T_{k+1} = Z_{k+1} + t_k = \sum_{i=1}^{k+1} Z_i$.

7. Puisque les animaux sont uniformément répartis dans les paquets de chocolat, quand le collectionneur possède k animaux, la probabilité que l'animal tiré dans un paquet soit nouveau est $\frac{n-k}{n}$ à chaque tirage. Nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_k = 1) &= \frac{n-k}{n}; \\ \mathbb{P}(Z_k = 2) &= \mathbb{P}(Z_k > 1) \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n} \frac{n-k}{n}. \end{aligned}$$

Ceci invite à la démarche suivante. Par récurrence sur l'entier naturel non nul j , montrons que

$$\mathbb{P}(Z_k = j) = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

Initialisation: $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \frac{n-k}{n}$ comme vu juste avant.

Hérédité: Soit $j \geq 1$ un entier naturel. Supposons $\mathbb{P}(Z_k = i) = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, \dots, j \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_k = j+1) &= \mathbb{P}(Z_k > j) \frac{n-k}{n} \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^j \mathbb{P}(Z_k = i)\right) \frac{n-k}{n} \\ &= \left(1 - \frac{n-k}{n} \sum_{i=1}^j \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}\right) \frac{n-k}{n} \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{1 - (k/n)^j}{1 - k/n}\right) \frac{n-k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^j \frac{n-k}{n}. \end{aligned}$$

8. D'après la question **XVIII** avec $p_k = k/n$, et la question **XXIII.6**,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = nH_n,$$

où H_n a été défini dans la partie **A**.

9. D'après la partie **A**,

$$\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln n$$

quand n tend vers $+\infty$.

XXIV. 1. Nous savons que les Z_k sont mutuellement indépendantes. Donc

$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = n^2 B_n - n H_n$$

où nous avons utilisé la question **XVIII.2**.

2. Nous savons d'après la conclusion de la partie **B** que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, $B_n \leq \pi^2/6$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - n H_n \leq n^2 B_n \leq \frac{n^2 \pi^2}{6}.$$

XXV. Soit $\lambda \in]0; +\infty[$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis la question **XXIV.2**,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \lambda n \ln n) &\leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\lambda n \ln n)^2} \\ &\leq \frac{\pi^2}{6\lambda^2 (\ln n)^2}. \end{aligned}$$

XXVI. D'après la question **XXIV.1**, pour tout $n \geq 1$ entier naturel, $\mathbb{E}(T_n) = n H_n$. Donc $\mathbb{P}(T_n \geq n H_n + n \ln n) \leq \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq n \ln n)$. D'après la question **XXV** avec $\lambda = 1$, nous avons par conséquent

$$\mathbb{P}(T_n \geq n H_n + n \ln n) \leq \frac{\pi^2}{6 \ln n},$$

de sorte que si l'on pose

$$n_0 = \left\lceil \exp \frac{100\pi^2}{6} \right\rceil,$$

alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(T_n \geq n H_n + n \ln n) \leq 1/100$. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev étant très sommaire, ce n_0 est vraisemblablement non optimal.*

5.6. Rappels et compléments de cours.

5.6.1. Théorème de prolongement de la dérivée.

Théorème 3. Soit $I = [a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C})$. On suppose que f est dérivable sur $]a; b]$. Si $f'(t)$ admet une limite finie $\delta \in \mathbb{C}$ quand t tend vers a , alors f est dérivable sur $[a; b]$ et $f'(a) = \delta$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on supposera que f est à valeurs réelles. On va jouer avec une largesse d'hypothèse parfois négligée du théorème des accroissements finis : celui-ci s'applique aux fonctions continues sur un intervalle et dérivables à l'intérieur de cet intervalle. Pour tout $h \in]0; b - a]$, il existe donc c_h tel que $0 < c_h < h$ et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c_h).$$

On en déduit que la limite du taux d'accroissement en a existe et est égale à δ ; autrement dit, f est dérivable en a et $f'(a) = \delta$. \square

5.6.2. *Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann.* Conformément au cadre défini par le volet *Calcul intégral* du programme spécifique de l'épreuve, la positivité de l'intégrale est une propriété de l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

Proposition. Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. Si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ est positive, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. De plus, il y a égalité si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration. Soit $(a_{i;n})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq r(n)}$ une suite de subdivisions de $[a; b]$ à $r(n)$ éléments, dont le pas est de limite nulle. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} (a_{i+1;n} - a_{i;n}) f(a_{i;n}).$$

Tous les termes de cette suite étant positifs, leur limite est positive. De plus si f n'est pas identiquement nulle alors il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) > 0$. Par continuité de f en x , il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $f(s) \geq \varepsilon$ pour tout $s \in [a; b]$ tel que $|s - x| \leq \delta$. Par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_{B_\delta(x) \cap [a; b]} \varepsilon dt \geq \min(\delta, b - a) \varepsilon > 0. \quad \square$$

Notons que dans le cadre plus abstrait de la théorie de la mesure (hors programme), la positivité est quelque chose qu'on va *demande* dans la définition d'une mesure positive. Ce mouvement des propriétés vers les axiomes est quelque chose qu'on observe plus généralement au fil de l'élaboration des mathématiques.

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale). Soit $[a; b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors pour toute f continue sur $[a; b]$ nous avons que $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Pour la preuve, on se ramène de nouveau à la propriété analogue pour les sommes de Riemann, qui s'obtient par récurrence à partir de l'inégalité du triangle dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.6.3. *Séries de fonctions.* Ce paragraphe est plus développé que les précédents. Les théorèmes utiles sont à la fin.

On rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge. Pour tout entier naturel d , \mathbb{R}^d et \mathbb{C}^d sont des espaces de Banach¹⁰. L'utilité de cette notion dans l'étude des séries de fonctions vient de la proposition suivante.

Proposition (Convergence absolue implique convergence). Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans E . Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ alors la suite $(\sum_{i=1}^n x_i)_n$ admet une limite dans E , notée $\sum_{n=1}^{+\infty} x_i$.

Démonstration. Posons $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ pour tout $n \geq 1$. Il suffit de montrer que (s_n) est une suite de Cauchy. Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et soit n_0 tel que $\sum_{i=n_0}^{+\infty} \|x_i\| \leq \varepsilon$. Soient $n, m \geq n_0$ avec $n < m$. Alors d'après l'inégalité du triangle dans E ,

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|s_i - s_{i-1}\| = \sum_{i=n+1}^m \|x_i\| \leq \sum_{i=n_0}^{+\infty} \|x_i\| \leq \varepsilon.$$

10. Le fait essentiel, qui est que les suites de Cauchy réelles convergent, peut s'obtenir *via* la propriété de la borne supérieure.

Nous avons vérifié que (s_n) est bien une suite de Cauchy. \square

Un cas très important de ce théorème est celui de $E = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ où K est un fermé borné de \mathbb{R}^d ou \mathbb{C}^d pour un certain $d \geq 1$. On appellera un tel K un compact dans la suite. On admettra ici que c'est un espace de Banach une fois muni de la norme qui à f associe $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} \|f(x)\|_E$. Nous renvoyons par exemple à J. Lelong-Ferrand et A. Arnaudiès, *Cours de mathématiques - Tome 2 : Analyse*, § VIII.3, (Dunod, 4e édition) pour une preuve de ce fait.

Théorème (Convergence normale implique convergence uniforme). *Soit $d \geq 1$ et soit K un sous-espace compact de \mathbb{R}^d ou \mathbb{C}^d . Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. Si la série de terme général $\|f_n\|$ converge, alors les sommes partielles de la série de terme général f_n convergent uniformément sur K , vers une fonction continue notée $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.*

Quand les hypothèses du théorème sont vérifiées on dit que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur K .

Démonstration. Dire que (f_n) converge normalement sur K , c'est dire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge absolument dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. On conclut d'après la proposition. \square

Théorème. *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit (f_n) une suite de fonctions sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

- (1) *Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe \mathcal{C}^k .*
- (2) *La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tous les segments de I vers une fonction g .*
- (3) *Il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $f_n^{(j)}(x_0)$ admet une limite finie $y_j \in \mathbb{R}$ quand $n \rightarrow +\infty$.*

Alors, (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur tous les segments de I . De plus f est de classe \mathcal{C}^k , et $f^{(k)} = g$.

Démonstration. Par récurrence sur k . Pour $k = 0$ c'est le théorème précédent. Supposons le théorème vrai pour $k - 1$, $k \geq 1$ donné, et donnons-nous une suite (f_n) vérifiant les trois conditions pour k . La suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continue, sa limite uniforme g sur tous les segments est donc continue. Soit G la primitive de g sur I , s'annulant en x_0 . Nous prétendons que pour tout $x \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_n^{(k)}(t) dt = G(x),$$

et que cette convergence est uniforme sur tous les segments de I . En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f_n^{(k)}(t) dt - G(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x f_n^{(k)}(t) dt - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f_n^{(k)}(t) - g(t)| dt. \end{aligned}$$

Or par hypothèse $|f_n^{(k)}|$ converge vers g uniformément sur tout segment de I . Donc étant donné $\varepsilon > 0$ et un segment $F = [a; b]$ de I , il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout

$n \geq n_0$,

$$\|f_n^{(k)} - g\|_{F,\infty} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Mais alors pour tout $x \in F$,

$$\left| \int_{x_0}^x f_n^{(k)}(t) dt - G(x) \right| \leq \int_{x_0}^x |f_n^{(k)}(t) - g(t)| dt \leq \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \frac{|x - x_0| \varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon.$$

Nous avons ainsi montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k-1)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[f_n^{(k-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x f_n^{(k)}(t) dt \right] = y_{k-1} + G(x),$$

uniformément sur tout segment de I . Nous en déduisons que $f_n^{(k-1)}$ converge uniformément sur tout segment, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence. \square

Théorème 4 (Convergence normale des séries dérivées). *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit (h_n) une suite de fonctions sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

- (1) Pour tout $n \geq 1$, h_n est de classe \mathcal{C}^k .
- (2) Pour tout segment $[a; b] \subseteq I$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{a \leq x \leq b} |h_n^{(k)}(x)|$$

converge.

- (3) Il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ la série de terme général $h_n^{(j)}(x_0)$ converge.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$, la série de fonctions de terme général $h_n^{(j)}$ converge sur I , uniformément sur tous les segments de I , vers une fonction de classe \mathcal{C}^{k-j} , et, en notant

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x) dx,$$

on a que $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^{(j)}(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. On pose pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in I$,

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^n h_m(x).$$

D'après la condition (2) et le théorème « convergence normale implique convergence uniforme », la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I , vers une limite f . On applique ensuite le théorème 2 à la suite (f_n) . \square

Donnons une version finale avec des hypothèses plus fortes, mais plus pratiques.

Théorème 5 (Convergence normale des séries dérivées, version utile). *Soit k un entier naturel. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit (h_n) une suite de fonctions sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On fait les hypothèses suivantes.*

- (1) Pour tout $n \geq 1$, h_n est de classe \mathcal{C}^k .

(2) Pour tout $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ et pour tout segment $[a; b] \subseteq I$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{a \leq x \leq b} |h_n^{(j)}(x)|$$

converge.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$, la série de fonctions de terme général $h_n^{(j)}$ converge sur I , uniformément sur tous les segments de I , vers une fonction de classe \mathcal{C}^{k-j} , et, en notant

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x) dx,$$

on a que pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^{(j)}(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. L'hypothèse (2) entraîne que les hypothèses (2) et (3) du théorème précédent sont vérifiées. La conclusion est la même. \square

On peut se demander dans quelle mesure l'hypothèse (1) est nécessaire dans les théorèmes précédents. Il s'avère qu'il n'est pas suffisant de supposer les f_n (ou de manière équivalente les h_n) seulement k fois dérivables. Ceci est dû au fait que la preuve repose de manière essentielle sur l'identification de $f^{(k-1)}$ à une primitive de $f^{(k)}$; or une fonction dérivée n'est pas nécessairement Riemann-intégrable. Arrêtons-nous donc pour aujourd'hui au pied de ce problème fécond du calcul intégral.

Le critère de Riemann.

Théorème. Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. La série de terme général $n^{-\alpha}$, $n \geq 1$, est convergente.

Démonstration. Par positivité de l'intégrale, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha},$$

et la fonction $f: t \mapsto t^{-\alpha}$ admet pour primitive sur $[1, +\infty[$ la fonction $F: t \mapsto \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}$. Donc pour tout $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} (1 - N^{1-\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

Puisque la série est de termes positifs et que ses sommes partielles sont majorées, elle converge. \square

Quand $\alpha = 2$, il existe une preuve plus élémentaire, pratiquée par le sujet **2021-1-VI** qui consiste à remarquer que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

ce qui permet de majorer les sommes partielles par des sommes télescopiques. Notons que $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \int_{n-1}^n dt/t^2$, donc cette preuve n'est pas très différente de celle du théorème, hormis le fait qu'elle ne fait pas apparaître l'intégrale.

Corollaire. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle ou complexe. S'il existe $\alpha > 1$ réel tel que $u_n = O(1/n^\alpha)$, alors la série de terme général u_n est convergente.

Démonstration. D'après le théorème, la suite (u_n) est **absolument convergente**, à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} , donc elle est convergente, en vertu du fait que les suites de Cauchy dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} convergent. \square

Convergence simple et convergence uniforme. Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs réelles. Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$. On considère les deux propriétés suivantes.

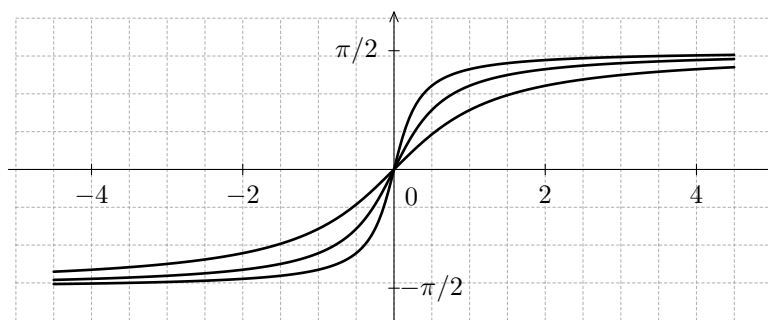
Convergence simple de (f_n) vers f : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Convergence uniforme de (f_n) vers f : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in I, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Nous avons vu que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément, alors la limite est continue. Une contraposée peut s'exprimer ainsi :

Proposition. *Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonction continues sur I . S'il existe $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f sur I , mais que f n'est pas continue sur I , alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I .*

Considérons la suite de fonctions de terme général $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_n(x) = \arctan(nx)$, dont voici le graphe pour $n = 1, 2$ et 4 .



Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers l'infini existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

On appelle *signe* la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0. (f_n) converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction $x \mapsto \pi/2 \text{signe}(x)$. Donc f_n ne converge pas uniformément vers la fonction $f: x \mapsto \frac{\pi}{2} \text{signe}(x)$.

6. ÉPREUVE ÉCRITE 2021-2, PROBLÈME 1

Le sujet est disponible à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep2_2021.pdf.

Partie A : une première approche.

- I.** Dans la cellule B5, l'élève peut renseigner $(D\$1+3)*B4-(3*D\$1+2)*B3+2*D\$1*B2$, puis actionner la poignée de recopie de la colonne B vers le bas.
- II.** Pour tout réel a , $a + 3 - (3a + 2) + 2a = 1$. Pour tout réel c , la suite constante égale à c est donc solution de (1).

Partie B : le cas $a = 0$.

III. 1. Pour tout entier naturel n , $e_{n+3} = 0 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 3e_{n+2} - 2e_{n+1}$. Donc $e \in E_0$.

2. Posons

$$\lambda = u_0 + \frac{u_2 - 3u_1}{2}.$$

Alors $v_2 = u_2 = 3u_1 - 2(u_0 - \lambda)$. Autrement dit $v_2 = 3v_1 - 2v_0$. Conjointement avec (2), ceci établit (3).

3. Considérons l'application linéaire φ de \mathbf{R}^2 dans lui-même qui à (α, β) associe $(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$. La matrice de φ dans la base canonique de \mathbf{R}^2 est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée donc de rang 2. On en déduit que φ est surjective, ce qui répond à la question. Concrètement, on peut prendre $\alpha = 2v_0 - v_1$ et $\beta = v_1 - v_0$.

4. Par récurrence (un peu forte) sur n .

Initialisation: Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai d'après la définition de α et β à la question **III.3**.

Hérédité: Supposons l'égalité vraie pour n et $n+1$, avec $n \geq 0$. D'après (3),

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= 3v_{n+1} - 2v_n = 3(\alpha + \beta 2^{n+1}) - 2(\alpha + \beta 2^n) \\ &= 3\alpha - 2\alpha + (6\beta - 2\beta)2^n \\ &= \alpha + 2^{n+2}\beta, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Les questions **III.3** et **III.4** invitent à définir trois constantes λ , α et β à partir de u_0 , u_1 et u_2 . Explicitement (même si ce n'est pas strictement demandé)

$$\begin{cases} \lambda &= u_0 + \frac{u_2 - 3u_1}{2} \\ \alpha &= 2u_1 - u_2 \\ \beta &= \frac{u_2 - u_1}{2}. \end{cases}$$

D'après les questions **III.3** et **III.4**, on a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda e_n + \alpha + \beta 2^n$$

autrement dit (u_n) est combinaison linéaire de (e_n) , de la suite constante égale à 1 et de la suite de terme général 2^n .

IV. Soit (u_n) une suite de la forme décrite à la question **III.5**. Pour tout n entier naturel,

$$\begin{aligned} 3u_{n+2} - 2u_{n+1} &= 3\lambda e_{n+2} + 3\alpha + 3\beta 2^{n+2} - 2\lambda e_{n+1} - 2\alpha - 2\beta 2^{n+1} \\ &= \lambda(3e_{n+2} - 2e_{n+1}) + \alpha + (12\beta - 4\beta)2^n \\ &= \alpha + \beta 2^{n+3} = u_{n+3}. \end{aligned}$$

On a donc que (u_n) vérifie la relation (2), autrement dit u est dans l'ensemble E_0 .

- V. 1.** D'après les questions **III.5** et **IV**, E_0 est l'espace vectoriel (de dimension finie égale à 3) engendré par (e_n) , la suite constante égale à 1 et la suite de terme général 2^n .
- 2.** Il s'agit d'un raisonnement par analyse-synthèse. L'analyse est menée dans la question **III** et la synthèse dans la question **IV**. En termes ensemblistes, E_0 a été déterminé par double inclusion.

Partie C : le cas $a = 3$.

VI. 1. La relation (4) se traduit sous la forme matricielle suivante. Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = AU_n$.

2. Par récurrence sur n .

Initialisation: $U_0 = A^0 U_0$.

Hérédité: Supposons que $U_n = A^n U_0$ pour un certain $n \geq 0$. Alors d'après **VI.1**,

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

3. La règle dite de Sarrus donne que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 9 - 3 - 4 - 9 = -2.$$

On peut aussi remarquer que P est à rotation d'un quart de tour près une matrice de Vandermonde $V(1, 2, 3)$, pour laquelle on dispose d'une formule donnant le déterminant. Un calcul matriciel donne que

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = PD$$

où D est la matrice diagonale de coefficients 1, 2 et 3 dans cet ordre. On en déduit que $A = PDP^{-1}$.

4. Par récurrence sur n .

Initialisation: $A^0 = PD^0 P^{-1}$.

Hérédité: Supposons que $A^n = PD^n P^{-1}$ pour un certain $n \geq 0$. Alors d'après **VI.3**,

$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^n P^{-1} = PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}.$$

5. D'après les questions **VI.2**, **VI.4** et la définition de la suite (U_n) , pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_n &= (0, 0, 1)U_n = (0, 0, 1)A^n U_0 = (0, 0, 1)PD^n P^{-1}U_0 \\ &= (1, 2^n, 3^n)P^{-1}U_0. \end{aligned}$$

Quitte à poser

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}U_0$$

on obtient bien que $u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n$.

6. On a montré à la question **VI.5** que x , y et z s'obtiennent comme coefficients de $P^{-1}U_0$, c'est-à-dire qu'ils s'obtiennent linéairement à partir de u_0 , u_1 et u_2 . Ce n'est pas demandé à ce stade, mais on peut être explicite : x , y et z forment la solution du système écrit à l'aide des coefficients de P ,

$$\begin{cases} x + 4y + 9z = u_2 \\ x + 2y + 3z = u_1 \\ x + y + z = u_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 2z = u_1 - u_0 \\ 3y + 8z = u_2 - u_0 \\ -x + 3z = u_2 - 2u_1. \end{cases}$$

Des deux premières lignes, on tire

$$2z = (3y + 8z) - 3(y + 2z) = u_2 - u_1 - 3(u_1 - u_0) = u_2 - 3u_1 + 2u_0.$$

Puis

$$3y = u_2 - u_0 - 8z = -3u_2 + 12u_1 - 9u_0$$

$$2x = 2(2u_1 - u_2 + 3z) = u_2 - 5u_1 + 6u_0.$$

Finalement

$$(\star\star) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_2 - 5u_1 + 6u_0 \\ -2u_2 + 8u_1 - 6u_0 \\ u_2 - 3u_1 + 2u_0 \end{pmatrix}.$$

- VII.** La relation (4) est linéaire, il suffit donc de vérifier que les trois suites données par l'énoncé appartiennent à E_3 . Pour la suite constante, c'est la question **II**. Soit u_n la suite de terme général 2^n . Calculons : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n &= 6 \cdot 2^{n+2} - 11 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n \\ &= (6 \cdot 4 - 11 \cdot 2 + 6)2^n \\ &= 8 \cdot 2^n = 2^{n+3} = u_{n+3}. \end{aligned}$$

Soit maintenant v_n la suite de terme général 3^n . Calculons : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n &= 6 \cdot 3^{n+2} - 11 \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot 3^n \\ &= (6 \cdot 9 - 11 \cdot 3 + 6)3^n \\ &= 27 \cdot 3^n = 3^{n+3} = u_{n+3}. \end{aligned}$$

Donc, toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E_3 .

- VIII.** D'après les questions **VI.5** et **7**, E_3 est l'espace vectoriel (de dimension finie égale à 3) engendré par la suite constante et les suites de terme général 2^n et de terme général 3^n .

IX. D'après l'équation ($\star\star$) établie dans la question **VI.6**, dans le cas particulier où $u_0 = u_2 = 1$ et $u_1 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2}(1+6) + (-1-3)2^n + \frac{1}{2}(1+2)3^n = \frac{7}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+1}}{2}.$$

X. Divisons par le terme dominant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3^{n+1}}{2} \left(1 - \frac{2^{n+3}}{3^{n+1}} + \frac{7}{3^{n+1}} \right).$$

Par somme et produit de limites de suites usuelles, la suite de terme général u_n diverge vers $+\infty$.

XI.

Algorithme 1 Recherche du n minimal tel que $u_n \geq 10^5$

Entrée: $U_0 \in \mathbb{R}^3$

Sortie: Un entier naturel

1: $(u_2; u_1; u_0) \leftarrow (1; 0; 1)$ et $n \leftarrow 2$

2: **tant que** $u_2 < 10^5$ **faire**

3: $(u_2; u_1; u; 0) \leftarrow (6 \cdot u_2 - 11 \cdot u_1 + 6 \cdot u_0; u_2; u_1)$

4: $n \leftarrow n + 1$

5: **fin tant que**

retourne n

XII. Le signe de z trouvé à la question **VI.6** dépend de u_0 , u_1 et u_2 . Rappelons que le signe de z est celui de $u_2 - 3u_1 + 2u_0$ d'après la question **VI.6**.

— Si $z > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; c'est le cas si U_0 est tel que dans les questions **IX** et **X**.

— Si $z < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; c'est le cas si U_0 est tel que pris par l'élève. Le comportement de l'algorithme dépend concrètement de comment sont traités les grands entiers par la machine. En théorie l'algorithme ne termine jamais. En pratique, il peut donner une réponse absurde après s'être arrêté quand u_n devient inférieur à -2^{63} . Ou bien produire un message d'erreur.

— Si $z = 0$ alors c'est le signe de $y = -u_2 + 4u_1 - 6u_0$ qui compte pour le comportement asymptotique de la suite de terme général u_n .

Partie D : le cas général. Probable erreur dans l'énoncé : il doit s'agir de la première année de licence.

XIII. 1. Les suites réelles forment un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

2. Montrons que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Introduisons l'application σ de l'espace des suites réelles dans lui-même telle que $\sigma(u)_n = u_{n+1}$ pour toute suite réelle u et tout $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après la relation (1), E_a est le noyau de l'application linéaire $\sigma^3 - (a+3)\sigma^2 + (3a+2)\sigma - 2a \text{Id}$. C'est donc un sous-espace vectoriel.

XIV. 1. Soit λ un nombre réel, u et v deux éléments de E_a . Alors

$$\theta(u + \lambda v) = \begin{pmatrix} (u + \lambda v)_2 \\ (u + \lambda v)_1 \\ (u + \lambda v)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 + \lambda v_2 \\ u_1 + \lambda v_1 \\ u_0 + \lambda v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} = \theta(u) + \lambda \theta(v).$$

Nous avons montré que θ est linéaire.

2. Comme nous ne savons pas *a priori* que E_a est de dimension finie égale à 3, on va devoir montrer qu'elle est injective et bijective.

Injectivité: Soit $u \in E_a$. Si $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, alors on montre par récurrence sur n que u est identiquement nulle.

Surjectivité: Quels que soient u_0, u_1 et u_2 , il existe une suite (u_n) dans E_a avec ces termes initiaux. Là encore, u est construite par récurrence à partir de la relation (1).

3. D'après la question **XIV.2**, E_a est en bijection linéaire avec \mathbb{R}^3 . C'est donc un espace vectoriel de dimension finie égale à 3.

XV. D'après la question **V.1**, une base de l'espace vectoriel E_0 est constituée de la suite (e_n) , de la suite constante égale à 1 et de la suite de terme général 2^n . D'après la question **VIII**, une base de l'espace vectoriel E_3 est constituée de la suite constante égale à 1, de la suite de terme général 2^n et de la suite de terme général 3^n .

Extraits de rapport de jury.

Partie A.

Question I: Le symbole $\$$ est très souvent oublié ou apparaît parfois inutilement devant la lettre de la colonne.

Question II: Il était particulièrement maladroit de choisir la lettre a pour désigner la valeur constante de la suite. Certains raisonnements sont ambigus, au point qu'il est difficile de deviner la pensée du candidat, par exemple lorsque celui-ci entreprend de montrer que si la suite est constante et vérifie la relation alors elle est constante...

Partie B.

Question III.1: Cette question s'est révélée discriminante quant à la maîtrise des quantificateurs et à la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Alors que ce mode de raisonnement ne peut s'appliquer ici on a rencontré des tentatives de récurrence.

Question III.2: La recherche de λ a souvent abouti à des absurdités ou a dérouter les candidats qui se sont perdus dans leur calcul. D'autres partent des relations données puis tournent en rond sans raisonner par équivalences.

Question III.3: Cette question a été très mal réussie, beaucoup de candidats n'ayant pas compris le lien entre u_n et v_n . Le système de deux équations à deux inconnues n'a pas souvent été identifié.

Question III.4: Certains candidats font appel à l'équation caractéristique d'une relation de récurrence d'ordre 2, qui pouvait permettre de conclure. L'hypothèse de récurrence forte est rarement bien rédigée.

Question III.5: Certaines écritures amènent à s'interroger sur la compréhension du concept de combinaison linéaire.

Question IV: Là encore, certains candidats partent de l'égalité à démontrer.

Question V.1: Il convient de distinguer la suite (u_n) de son terme général u_n en évitant de confondre ces deux notations. Certains candidats contournent la difficulté en rédigeant en français plutôt qu'en langage symbolique.

Question V.2: Cette question a été très peu traitée. La réponse « analyse synthèse » apparaît essentiellement dans les bonnes copies. Le raisonnement par équivalence est souvent invoqué.

Partie C.

Question VI.1: Un nombre important de candidats se contentent d'écrire la relation sans la justifier.

Question VI.2: Il est ici souvent question, de façon abusive, de suite géométrique.

Question VI.3: Des candidats utilisent la règle de Sarrus pour calculer le déterminant de la matrice P plutôt que de développer selon une ligne ou une colonne. L'utilisation de la calculatrice pour le calcul du déterminant et de l'inverse de P a permis à des candidats de gagner du temps.

Question VI.4: L'usage des pointillés en lieu et place d'un raisonnement par récurrence est assez fréquent.

Question VI.5: Dans beaucoup de copies, cette question a été finalisée dans le cadre de la question suivante.

Question VI.6: La plupart des candidats font des calculs sans penser à exploiter P^{-1} calculée précédemment.

Question VII: Cette question a été plutôt bien réussie.

Partie D.

Question XIII.1: Il convenait de préciser le corps des scalaires de cet espace vectoriel.

Question XIII.2: Il fallait s'assurer que E_a est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.

Question XIV.1: Certains candidats se contentent d'écrire la définition d'une application linéaire.

Question XIV.2: La notion d'injectivité paraît mieux connue que celle de surjectivité. Cependant peu de candidats semblent avoir compris que de telles suites sont complètement déterminées par la donnée des trois premiers termes.

Question XIV.1: Certains candidats évoquent la bijection réciproque sans donner les justifications nécessaires. D'autres affirment qu'une application linéaire injective est surjective et donc bijective sans évoquer la dimension finie.

Question XIV.3: Il était indispensable de mentionner les caractères linéaire et bijectif de l'application.

Question XV: La justification reposait sur le fait que dans un espace vectoriel de dimension 3 une famille génératrice de 3 éléments est nécessairement une base.

7. ÉPREUVE ÉCRITE 2021-2, PROBLÈME 2

Énoncé. L'énoncé se trouve à l'adresse https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep2_2021.pdf

Partie A : étude de la radioactivité d'un noyau atomique.

I. X suit la loi exponentielle de paramètre λ . Donc, pour tout réel positif t ,

$$P(X \leq t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = [-e^{-\lambda s}]_{s=0}^{s=t} = 1 - e^{-\lambda t},$$

ce qu'il fallait démontrer. On a utilisé que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, t]$ pour tout t de sorte que l'intégration par parties est bien justifiée. D'après la formule des probabilités totales (ici dans un cas « simple ») on en déduit que

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t}.$$

- II.** La probabilité que le noyau se soit désintégré, au temps t , est $1 - e^{-\lambda t}$. La probabilité que le noyau ne soit pas encore désintégré au temps t est $e^{-\lambda t}$.
- III.** Par définition de la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t + h)$ et d'après la question **I**,

$$P_{(X>t)}(X > t + h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X > h).$$

- IV.** $P_{(X>t)}(X > t + h)$ est la probabilité que le noyau ne soit pas désintégré au temps $t + h$ sachant qu'il n'était pas désintégré au temps t .
- V.** Dire que la désintégration radioactive est un phénomène sans mémoire, c'est dire que la variable aléatoire X est sans mémoire, ce qui est exactement exprimé par l'identité obtenue à la question **III** : $P_{(X>t)}(X > t + h)$ ne dépend pas de t .
- VI.** Pour t assez grand, $te^{-t} \leq e^{-t/2}$. Or la fonction qui à t associe $e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty]$. Donc $t \mapsto tf(t)$ (qui est continue sur tous les segments de la forme $[0, x]$ pour $x \geq 0$) est intégrable sur $[0, +\infty]$. En intégrant par parties,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

On a ici utilisé que f est de classe \mathcal{C}^1 et intégrable, de sorte que l'intégration par parties et l'usage de la borne de la primitive en $+\infty$ (correspondant à une limite de la primitive en question), sont respectivement licites. Cette espérance correspond au temps caractéristique du processus radioactif.

- VII.** Pour t assez grand, $t^2 e^{-t} \leq e^{-t/2}$. Or la fonction qui à t associe $e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty]$. De plus $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue sur tous les segments de la forme $[0, x]$ pour $x \geq 0$. Donc la fonction qui à t associe $t^2 e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty]$. De plus, elle est de classe \mathcal{C}^2 ; en intégrant deux fois par parties,

et sous réserve a priori d'existence de limites pour la borne infinie considérée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt \\ &= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2te^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2},\end{aligned}$$

puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1/\lambda^2$. L'écart-type de X est $\sigma = \mathbb{V}(X)^{1/2} = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B : étude de l'évolution d'un échantillon de noyaux radioactifs.

VIII. 1. La proportion de noyaux radioactifs non désintégrés est un estimateur statistique de $P(X > t)$. D'après la loi des grands nombres, cet estimateur converge presque sûrement vers la valeur de $P(X > t)$ quand le nombre d'atomes observés tend vers l'infini.

2. D'après la question **I**,

$$N(t) = N_0 P(X > t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

3. $N(t)$ est le nombre de noyaux qu'on s'attend à observer *en moyenne*. On ne peut pas interpréter un nombre attendu en moyenne comme un nombre d'élément d'une collection donnée.

IX. 1. La demi-vie s'exprime comme

$$t_{1/2} = \sup \left\{ t \geq 0 : e^{-\lambda t} \geq \frac{1}{2} \right\} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

2. D'après **IX.1**, $\lambda \approx \ln 2 / t_{1/2}$. Ici donc,

$$\lambda = \frac{0,69}{8} = 0,086 \text{ jour}^{-1}.$$

3. Avec λ tel que dans la question précédente, on calcule

$$\begin{aligned}P(6j < t < 10j) &= \int_6^{10} \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= -\exp\left(-\frac{10 \ln 2}{8}\right) + \exp\left(-\frac{6 \ln 2}{8}\right) \\ &\approx 0,174,\end{aligned}$$

où j est une abréviation de l'unité « jour ».

X. 1. Dans le programme de Première générale et Technologique, Spécialité mathématique (à retrouver sur <https://eduscol.education.fr/document/24565/download>, page 10) :

« Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. »

On peut donc a priori utiliser que le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est 1. **Attention : consulter le rapport de jury qui recommande d'en faire plus.**

2. Mathématiquement,

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X \leq t + \Delta t) &= 1 - \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - e^{-\lambda\Delta t} = \lambda\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

(Le point de vue physique est plutôt inverse : la loi de X est déduite du fait que la probabilité de désintégration entre t et $t + \Delta t$ est égale à $\lambda\Delta t$.)

XI. 1. La fonction $\theta: [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$, $u \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$ est continue et strictement croissante, d'inverse $\theta^{-1}: x \mapsto 1 - e^{-\lambda x}$ donc

$$P(X \leq t) = P(U \leq \theta^{-1}(t)) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Donc X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

2. Voici une implémentation de la fonction `expo(Lambda)` dans le langage Python . On a utilisé le résultat de la question **XI.1**.

```
1 from math import log as ln
2 from random import random as uniform
3 def expo(Lambda):
4     U = uniform()
5     X = -ln(1-U)/Lambda
6     return X
```

3. a. *Attention : si l'on écrit la fonction `mystere` comme dans l'énoncé, le résultat est toujours 0. Il faut spécifier N et NO comme étant de type `float`.*

La fonction `mystere(Lambda,t)` réalise, pour 1000 noyaux atomique suivant la loi de désintégration de caractéristique λ , l'expérience aléatoire consistant à tester s'ils sont désintégrés au temps t , et retourne la proportion de noyaux qui ne sont pas désintégrés.

b. On peut demander `mystere(0.086,6) - mystere(0.086,10)` pour approcher le résultat de la question **IX.3**. Ci-dessous, les résultats pour dix essais de cette commande.

0.185	0.177
0.215	0.173
0.188	0.174
0.159	0.158
0.199	0.196

Extraits de rapport de jury.

Partie A.

Question I: Cette question a été bien réussie dans l'ensemble.

Question II: La demande d'une interprétation consiste à faire le lien entre le modèle mathématique et la situation étudiée. Cette question révèle des contresens et une mauvaise compréhension de l'énoncé.

Question III: Cette question est souvent bien traitée, même si certains candidats s'arrangent visiblement pour tomber sur le résultat attendu sans utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle.

Question IV: Encore une fois, l'objet même de l'interprétation ne semble pas bien saisi.

Question V: La bonne compréhension de l'expression « sans mémoire » exige d'avoir remarqué que la probabilité conditionnelle étudiée est indépendante du temps t .

Questions VI et VII: Les définitions de l'espérance, de la variance et de l'écart-type sont connues. Les intégrations par parties sont relativement réussies mais beaucoup de candidats utilisent sans aucune précaution $+\infty$ comme borne dans l'intégration par parties. Les convergences sont souvent mal justifiées. Il convenait de mentionner que les fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 .

Partie B.

Question VIII.1: Il s'agissait de faire référence à la loi faible des grands nombres, mais cette question n'a pas toujours été bien comprise.

Question VIII.3: Cette question a donné lieu à des réponses diverses et variées, avec des confusions entre radioactivité et désintégration. Le terme « modélisation » est très peu employé.

Questions IX.1 et IX.2: La modélisation de la demi-vie et son calcul ont été fréquemment réussies.

Question IX.3: Même si l'énoncé fait apparaître des nombres entiers de jours, il ne fallait pas perdre de vue que l'on a toujours affaire à une loi continue.

Question X.1: Il s'agissait bien ici de refaire une démonstration du cours de terminale reposant sur la valeur en 0 de la dérivée de la fonction exponentielle. Rappelons que l'expression ambiguë $(\exp(0))'$ est à proscrire.

Question X.2: Cette question a été peu traitée. Calculer une limite en faisant intervenir des équivalents exige une certaine rigueur.

Question XI.1: Cette question a été réussie dès l'instant où le candidat a utilisé que U suit la loi uniforme.

Questions XI.2, XI.3.a, XI.3.b: Ces questions peu traitées ont été assez bien réussies lorsqu'elles ont été abordées.

PROGRAMME SPÉCIFIQUE DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE ÉCRITE

Source : <https://www.devenirenseignant.gouv.fr/>, version du 29 avril 2021.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste: Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence.

Nombres complexes: Module et argument. Racines n -ièmes de l'unité. Exponentielle complexe, trigonométrie. Applications à la géométrie plane. Equation du second degré [dans \mathbf{C}].

Fonctions d'une variable réelle: Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. Dérivabilité, théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis. Extension aux fonctions à valeurs complexes. Fonctions à valeurs dans \mathbf{R} . Courbes paramétrées.

Calcul intégral et équations différentielles: Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. Calculs de primitives. Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Nombres réels et suites réelles: Construction de \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{Q} . Présentation axiomatique de \mathbf{R} , bornes supérieure et inférieure. Valeurs approchées, nombres décimaux. Limite d'une suite réelle, théorèmes d'existence. Suites extraites. Extension aux suites à valeurs complexes. Séries numériques, séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries de références (séries géométriques, séries de Riemann).

Analyse asymptotique: Relations de comparaison des suites et des fonctions. Développements limités.

Suites et séries de fonctions: Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. Convergence normale des séries de fonctions. Séries entières, rayon de convergence. Développement en série entière des fonctions usuelles.

Algèbre linéaire: Systèmes linéaires, algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Espaces vectoriels de dimension finie, familles libres, familles génératrices, bases. Applications linéaires. Homothéties, projections et symétries. Rang d'une application linéaire. Représentations matricielles d'un endomorphisme. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées : éléments propres, diagonalisation, trigonalisation.

Matrices: Calcul matriciel, matrices inversibles, transposition. Matrices et applications linéaires, changement de base. Équivalence, similitude. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dénombrement: Cardinal d'un ensemble fini, listes, combinaisons, factorielles, formule du binôme.

Arithmétique des entiers: Arithmétique des entiers : nombres premiers, PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide. Sous-groupes de \mathbf{Z} . Congruences. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème des restes chinois, petit théorème de Fermat.

Polynômes: Arithmétique des polynômes à coefficients réels ou complexes. Racines. Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$.

Groupes: Sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes monogènes et groupes cycliques : groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, groupe des racines n -ièmes de l'unité ; générateurs, indicatrice d'Euler. Ordre d'un élément. Groupes symétriques. Exemples de groupes agissant sur un ensemble, exemples de groupes laissant invariante une partie du plan ou de l'espace.

Produit scalaire et espaces euclidiens: Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles, des isométries affines, des similitudes. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

Probabilités: Espaces probabilisés finis. Probabilités conditionnelles, conditionnement et indépendance. Variables aléatoires sur un univers fini : lois usuelles (loi uniforme, loi binomiale), variables aléatoires indépendantes, espérance, variance et écart-type. Variables aléatoires discrètes : espérance et variance, loi de Poisson, loi géométrique, loi exponentielle ¹¹.

11. NdR : S'agissant de variables aléatoires discrètes, la nuance entre loi géométrique et loi exponentielle ne m'est pas très claire.

INDEX

- Angles
 - alternes-internes, 30
 - opposés par le sommet, 38
- Application des nombres complexes à
 - la géométrie plane, 35, 39
- Application linéaire, 9
- Applications, 24
- Approximation, 10

- Base, 9
- Bissectrice, 37

- Cas d'égalité (ou d'isométrie) des triangles, 30
- Changement de variable, 5, 47
- Concurrence, 23
- Convergence
 - absolue, 54
 - normale, 55
 - simple, 58
 - uniforme, 58
- Corps, 40
- Critère
 - de Riemann, 48

- Dodécagone régulier, 39
- Droite, 23, 29
- Duplication du cube, 40
- Dérivabilité, 3, 45
- Déterminant
 - d'un endomorphisme, 16
 - d'une matrice carrée, 17, 18
 - de Vandermonde, 17, 60
- Développement du déterminant, 17

- Entropie
 - d'une variable aléatoire continue, 4
 - d'une variable aléatoire discrète, 3
- Equation fonctionnelle
 - de Cauchy, 27
- Espace vectoriel, 62
 - de dimension finie, 9
- Espérance, 50

- Fonction
 - affine par morceaux, 14
 - arctangente, 58
 - exponentielle, 28
 - complexe, 34
 - signe, 58
 - sinus, 13
- Formule
 - d'Euler, 35
 - de Taylor-Lagrange, 22
- Formule d'Euler, 39

- Groupe, 42
- Géométrie affine, 18, 40

- Heptadécagone régulier, 40

- Indépendance (variables aléatoires), 53
- Information, 7
- Interpolation
 - d'Hermite, 22
 - de Lagrange, 9
- Intégrale
 - d'une fonction continue sur un segment, 6
 - de Gauss, 5
 - généralisée, 5
- Intégration par parties, 4
- Involution, 24
- Inégalité
 - de Bienaymé-Tchebychev, 51
 - de grande déviation, 53
 - de Jensen, 4
 - de Markov, 51
 - de Taylor-Lagrange, 22
 - des accroissements finis, 12
 - triangulaire intégrale, 54

- Loi
 - de Laplace, 8
 - exponentielle, 5, 65
 - géométrique, 47
 - normale, 4

- Mathématiques expertes, 21
- Matrices et applications linéaires, 16
- Moyenne, 1
- Médiane, 2
- Médiatrice, 29, 37

- Méthode
d'Archimède, 41
- Nombre
 γ , 44
 π , 40
de Fermat, 40
- Nombres complexes
Module et argument, 34
- Noyau
de Dirichlet, 45
- Origamis, 41
- Parabole, 18
- Parallèle, 23, 30
- Parallélogramme, 38
- Pentagone régulier, 36
- Perpendiculaire, 29
- Polynôme, 9, 17
- Problème
de Bâle, 45
de la collectionneuse, 51
- Projections orthogonales, 35
- Pseudo-code, 62
- Python, 44, 67
- Quadrature du cercle, 40
- Racines n -ièmes de l'unité, 34, 39
- Relation
de Chasles intégrale, 43
- Règle
de Cramer, 19
de Sarrus, 60
- Récurrence, 10, 18, 34, 52, 60
forte, 59
- Suite
de Cauchy, 55
récurrente linéaire, 59
- Suites
adjacentes, 44
- Série
de Riemann, 45
harmonique, 52
télescopique, 45
à termes positifs, 45
- Séries numériques, 43
- Tableur, 59
- Théorème
de Darboux, 22
de Fubini, 5
de prolongement de la dérivée, 53
de Pythagore, 36
de Rolle, 10, 21
de Thalès, 33
des accroissements finis, 22, 53
des valeurs intermédiaires, 22
- Trisection de l'angle, 40
- Variance, 53
- Vecteurs, 38