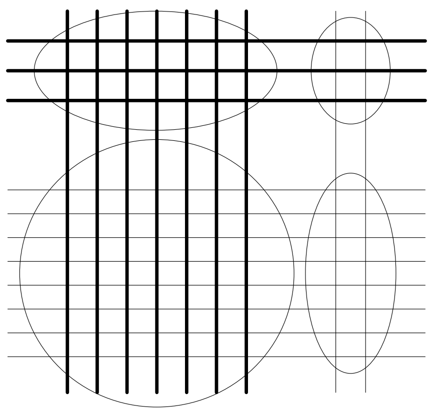
Exercice

Mercredi 26 janvier 2022 : O

Exercice 1 Multiplication japonaise

Dans cet exercice, on s'intéresse à la multiplication de 72 par 38.

1) Effectuer la multiplication posée 72×38 puis 38×72. Le résultat est-il le même ? Les nombres apparaissant dans vos deux multiplications posées sont-ils les mêmes ?
2) En s'inspirant d'une méthode de multiplication japonaise, on a représenté la multiplication de 72 par 38 dans le dessin ci-dessous.



Que représentent les barres épaisses ? Les barres fines ? Les croisements ? Combien y a-t-il de croisements dans chacun des groupes éntourés ?

3) Dans la multiplication posée suivante, on a fait exprès de réserver une ligne entière pour chaque multiplication entre un chiffre de 72 et un chiffre de 38, ce qu'on ne fait pas d'habitude :

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 7 & 2 \\
\times & & & 3 & 8 \\
\hline
 & & & 1 & 6 \\
 & & 5 & 6 & 0 \\
 & & & 6 & 0 \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & 6
\end{array}$$

En quoi cette présentation de la multiplication posée correspond-elle au dessin précédent ? *On pourra faire correspondre à chaque ligne l'un des groupes entourés.*

4) Comparez vos multiplications posées du début de l'exercice avec celle de la question 3.

Exercice 2 Analyse des opérations posées

Pour les calculs posés, on considère les catégories d'erreurs suivantes.

Erreurs de présentation : (Essentiellement dans les additions et soustractions) Lorsque les nombres utilisés sont de longueurs différentes, ils ne sont pas alignés correctement dans la partie au tout début du calcul posé au dessus de la première barre verticale.

Erreur de chronologie : Les calculs sont effectués mais pas dans l'ordre prévu par l'algorithme (par exemple, de gauche à droite).

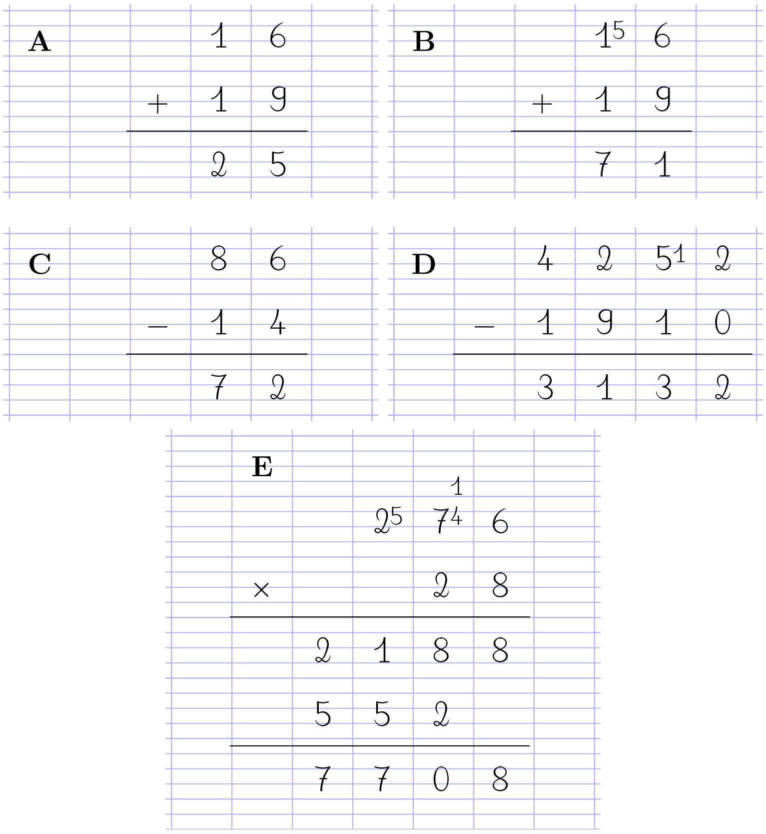
Erreur de mémoire : Oubli ou souvenir erroné des tables d'addition et de multiplication, indépendamment de la capacité à savoir mener l'algorithme.

Erreur de gestions des retenues : Très diverses ; à évaluer suivant le type d'opération. Retenues ignorées, mauvais nombre retenu...

Erreur de décalage : (dans la multiplication seulement). Souvent provoqué lorsque l'un des nombres utilisé a un chiffre zéro qui n'est pas le chiffre de ses unités.

Autres erreurs : Toutes celles qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes.

Dans les productions suivantes, déterminer quand c'est possible quelle(s) catégorie d'erreur(s) a été commise.



Exercice 3 Calcul posé vs calcul réfléchi

En binôme. Pour chacun des calculs suivants, l'un de vous fait le calcul posé, l'autre le calcul réfléchi (avec la possibilité de l'écrire en ligne). Une fois que les deux ont terminé, confrontez vos résultats [1] et renseignez le tableau suivant, avec les informations suivantes :

— Quelle procédure a été la plus rapide à donner le bon résultat

— S'il y a eu des erreurs, avec quelle procédure et (si possible) pourquoi.

On a donné deux exemples sur la première et deuxième ligne.

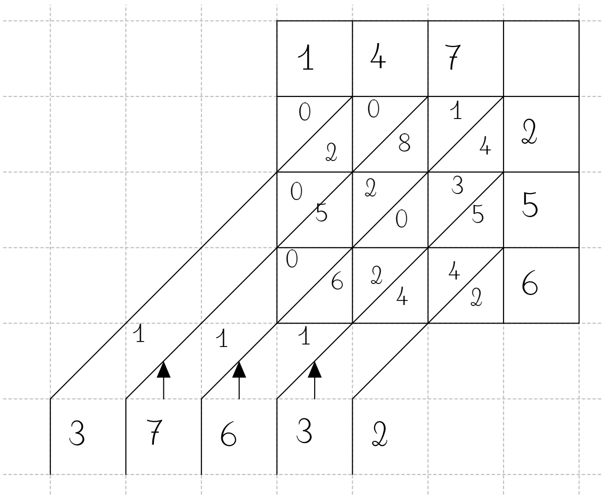
Mise en commun : pour chaque calcul, on compte pour combien de binômes le calcul posé a été plus rapide.

1. En cas de désaccord, la calculatrice fera l'arbitre.

Calcul	Posé	Réfléchi	Erreurs éventuelles
15 × 9		⋆	
72 × 19	⋆		*calcul réfléchi : dans la soustraction* $20 \times 72 - 72 = 1440 - 72$
700×40			
$59 - 32$			
99×101			
$1729 + 561$			
$256 + 5$			
2×512			
13×17			
$768 - 128$			

* Exercice 4 La jalousie

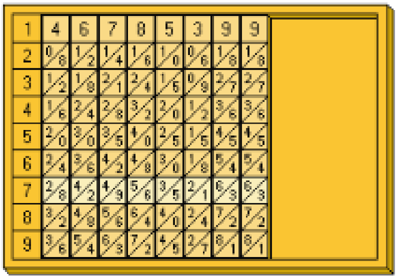
Jalousie, *n.f.* : Treillis de bois ou de fer au travers duquel on voit sans être vu.

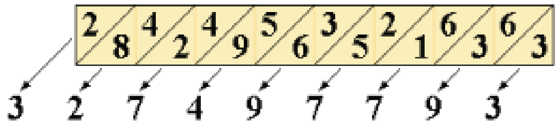


Ci-dessus, on a posé la multiplication 147×256 par la méthode dite de jalousie. Le résultat est 37 632.

1. Vérifier le résultat par un calcul posé « classique » (traditionnel de l'école primaire en France).
2. Dans le calcul par jalousie, où sont les retenues ?
3. Calculer 732×129 par jalousie.

** Exercice 5 Les bâtons de Napier





1. Quelle est l'opération effectuée ci-dessus ?
2. Effectuer 5×5399 avec les bâtons de Napier. Vérifier par un calcul réfléchi.

1. Elements de correction

Solution de l'exercice 1

1. Le résultat est le même mais les calculs ne sont pas exactement les mêmes.
2. Les cordes épaisses représentent les dizaines, les cordes fines représentent les unités. Les cordes verticales représentent 72, les cordes horizontales représentent 38.
   Les intersections fine-fine représentent des unités dans le produit. Les intersections fine-épaisse représentent des dizaines dans le produit. Les intersections épaisse-épaisse représentent des centaines dans le produit.
3. Le calcul de 8×2 correspond au compte des intersections jaune-jaune.
   Les calculs de 70×8 et de $30 \times 2 = 60$ correspondent à l'énumération des intersections fine-épaisse.
   Le calcul de 70×30 correspond au compte des intersections épaisse-épaisses.
4. Quand on pose la multiplication 72×38, la première ligne sous la première barre horizontale est 576. En fait on a déjà additionné 16 et 560 en même temps qu'on faisait ces multiplications. Puis la deuxième ligne est 2160, c'est $60+2100$, de même. Donc la présentation qu'on a l'habitude de faire est une forme condensée de celle qui apparaît avec 4 lignes.
   Si on pose 38×72, le compte est fait dans un ordre différent (mais le résultat, la somme est bien la même à la fin).

Le dessin des cordes est une adaptation de la méthode de multiplication dite *japonaise*.

Solution de l'exercice 2

A. Erreur de gestion de retenue. Il est possible aussi qu'il y ait erreur de chronologie, mais on n'a aucun moyen de savoir a posteriori.

B. Erreur de gestion de retenue : dans le calcul de $6 + 9 = 15$, c'est 1 qui est écrit et 5 qui est retenu. *Remarque : cette erreur est assez peu naturelle parce que dans les additions de deux nombres la retenue est toujours au plus 1. On la rencontre plus facilement dans des multiplications.*

C. On ne peut pas savoir s'il y a une erreur, le résultat est correct.

D. Erreur de chronologie, les soustractions ont été faites de gauche à droite

E. Erreur mémoire, $8 \times 7 = 56$ et pas 54 dans la seconde multiplication ! tout le reste est juste.

Solution de l'exercice 3

Pas de correction pour cet exercice.

Solution de l'exercice 4

1. A faire vous.
2. Comme dans le calcul posé classique, il y a deux types de retenues. Les retenues des multiplications apparaissent dans les coins en haut à gauche des carrés où les multiplications sont effectuées. Les retenues de l'addition finale apparaissent en bas. *Finalement l'algorithme de jalousie est presque le même que la méthode classique, la seule différence notable est l'organisation spatiale. Pas de risque que les retenues se marchent les unes sur les autres !*
3. Le résultat est 94 428.

Solution de l'exercice 5

1. C'est 7×46785399.
2. Les bâtons sont déjà bien positionnés pour faire 5×5399. On trouve 26 995. Il n'y a même pas de retenue à prendre ! On peut le retrouver par calcul réfléchi, $5 \times 5399 = 5 \times 5400 - 5 = \frac{10 \times 5400}{2} - 5 = 27000 - 5$.

Crédits. Didier Lesesvre (Exercice 1 questions 2 et 3 et exercice 5 question 1)

Mercredi 2 février : Triangle

Exercice 6 La concourance des médiatrices

Tracer un triangle quelconque ABC, et les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$; elles se coupent en O.

1. Tracer le cercle de centre O et passant par le point A. Que constate-t-on ?
2. La médiatrice de $[BC]$ passe-t-elle par O ? Pourquoi ?

Exercice 7 Les propriétés du parallélogramme

À l'arrivée dans cet exercice, une sorcière mal intentionnée a balayé dans votre esprit toutes les propriétés du parallélogramme. Elle vous a même fait oublier que des quadrilatères appelés parallélogrammes existent.

On considère $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

1. On suppose que (AB) est parallèle à (CD) et que (AD) est parallèle à (BC).
   a) Montrer que $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.
   b) Que peut-on dire des angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$?
   c) Montrer que les triangles ABD et BCD sont égaux, puis que $AB = CD$.
   d) Montrer que les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur.

* 2. Montrer que si $AB = CD$ et $AD = BC$ alors (AB) est parallèle à (CD) et (AD) est parallèle à (BC). *On pourra prendre « à rebours » la question précédente.*

3. On suppose maintenant que $AB = CD$ et que (AB) et (CD) sont parallèles.
   a) On appelle I le point où les diagonales de $ABCD$ se coupent. Montrer que les triangles ABI et CDI sont égaux.
   b) En déduire que les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.

* 4. Montrer que si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, alors les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur. *On pourra utiliser que deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Exercice 8 Construction de la parallèle

On considère une droite Δ du plan, et un point C qui n'est pas sur la droite Δ.

1. Décrire deux procédures pour tracer la parallèle à Δ passant par C à la règle non graduée et au compas.
2. Le cas échéant, justifier vos procédures au moyen des propriétés du parallélogramme démontrées dans l'Exercice 7.
3. Comparer vos procédures au regard du temps de mise en oeuvre, de leur précision, et de leur difficulté de justification.

Exercice 9 (*« Géométrie à l'École »*[2])

2. François Boule, *Savoir dire et savoir-faire*, IREM de Bourgogne.

Voici un jeu constitué des dix étiquettes.

Deux angles droits seulement	Quatre angles droits
Côtés égaux deux à deux	Deux côtés égaux seulement
Quatre côtés égaux	Côtés opposés parallèles
Deux côtés parallèles seulement	Diagonales égales
Diagonales perpendiculaires	Diagonales se rencontrant en leur milieu

On choisit au hasard deux étiquettes parmi les dix et on doit essayer de dessiner un quadilatère qui a ces deux propriétés.

1. Avec un tel dispositif, combien de tirages différents est-il possible de réaliser ? Justifiez votre réponse.
2. Un enfant a selectionné les deux étiquettes suivantes :

   Deux angles droits seulement   Diagonales perpendiculaires

   a) En se limitant à la première propriété deux angles droits seulement, tracer à main levée les deux configurations possible.
   b) En prenant en compte les deux propriétés construire à l'aide des outils de la géométrie (règle, équerre, compas) une figure correspondant à chacune des configurations possible. Rédiger leur programme de construction.
3. On choisit l'étiquette

   Deux côtés parallèles seulement.

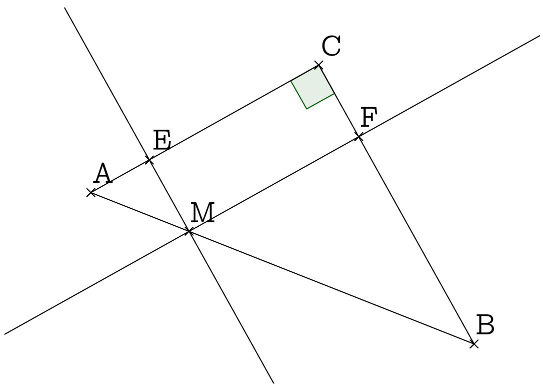
   Trouver toutes les étiquettes incompatibles avec elle. Justifier les réponses.
4. On s'intéresse aux quadrilatères qui possèdent les deux propriétés

   Diagonales perpendiculaires   Diagonales égales

   Soit ABCD un tel quadrilatère, on appelle E, F, G, H les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

Exercice 10

Soit un triangle ABC rectangle en C et M un point de son hypoténuse. La perpendiculaire à [AC] passant par M coupe [AC] en E La perpendiculaire à [BC] passant par M coupe [BC] en F.



a) Quelle est la nature du quadrilatère ECFM ?

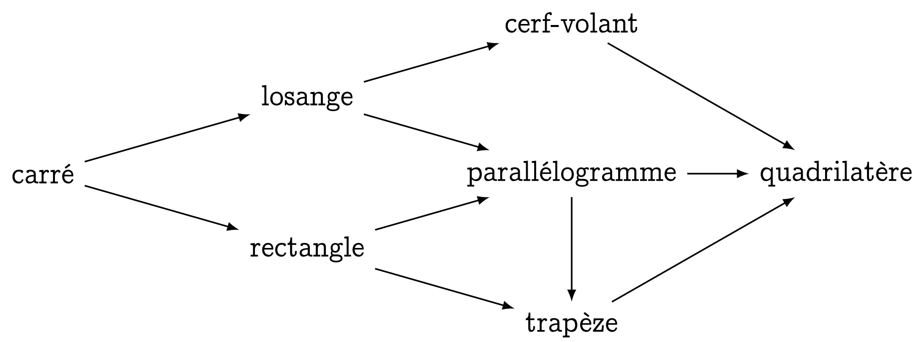


FIGURE 1. Les quadrilatères

b) Quelle relation y a-t-il entre EF et CM, quelle que soit la position de M ?

Exercice 11

Soit $ABCD$ un parallélogramme, qui a un angle droit et deux côtés adjacents de même longueur. Que peut-on dire de $ABCD$?

Exercice 12 (*CRPE Amiens 1995*)

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que AB $= 8\,\text{cm}$; C un point du cercle tel que AC $= 4\,\text{cm}$; D le point tel que C soit le milieu du secgment $[AD]$ et E le point tel que C soit le milieu du segment [BE].

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Quelle est la nature du triangle ACO ?

* c) Montrer que les droites (OC) et (BD) sont parallèles.

d) Montrer que le triangle ABD est équilatéral.

e) Que représente la droite (BC) pour le segment $[AD]$?

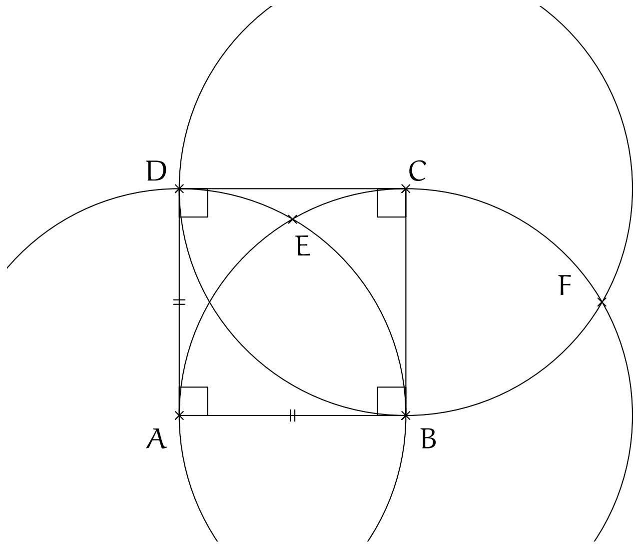
f) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDE$?

Exercice 13

ABC est un triangle rectangle et isocèle, de sommet principal C. La droite (d) passe par A et elle est parallèle à (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (d) au point E. Quelle est la nature du triangle ABE ?

* Exercice 14

Sur la figure suivante, ABCD est un carré. Montrer que les points D, E et F sont alignés.



* Exercice 15 La concourance des hauteurs

On considère un triangle ABC.

1. [3] Combien de parallélogrammes ayant les points A, B et C comme sommets peut-on construire ?
2. Construire ces parallélogrammes et vérifier qu'ils forment tous ensemble un triangle PQR de sorte que A est le milieu de [PQ], B est le milieu de [QR] et C est le milieu de [RP].
3. a) Montrer que les hauteurs de ABC sont des médiatrices de PQR (précisez lesquelles, pour chacune des hauteurs).
   b) En déduire que les hauteurs de ABC concourent en un point H (On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1).
4. * a) Montrer que ABC et PQR ont le même centre de gravité. *On pourra utiliser une propriété du parallélogramme bien choisie.*
   ** b) En déduire que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H de ABC sont alignés. *On pourra utiliser que* G *est situé aux deux tiers de la médiane issue de chaque sommet.*

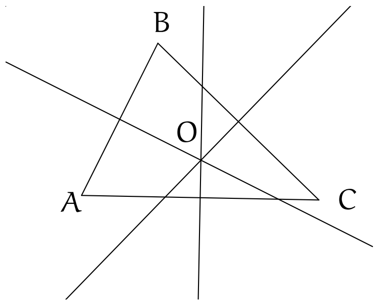
Solutions de

Solution de l'exercice 6

1. On constate que le cercle de centre O et passant par le point A passe aussi par B et C. En effet, O est sur la médiatrice de $[AB]$ donc ce cercle passe par B. De même, O est sur la médiatrice de $[AC]$ donc OC = OA, ce cercle passe par C. On en déduit que O est le centre du cercle circonscrit, et par la même occasion, que ce dernier existe et est unique.

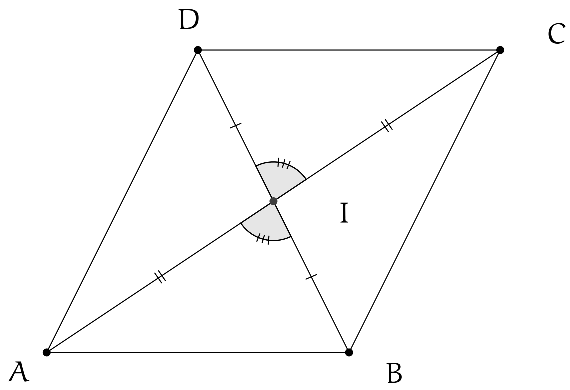
2. Oui, car OB = OA et OA = OC donc OB = OC.

3. CRPE - Maths : Ecrit 2022 - Nouveau concours, Vuibert.



Solution de l'exercice 7

1. a) Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont des angles alterne-internes formés par la droite (BD), sécante commune aux droites (AB) et (CD). Or (AB) et (CD) sont parallèles, donc $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.
   b) Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont des angles alterne-internes formés par la droite (BD), sécante commune aux droites (AD) et (BC). Or (AD) et (BC) sont parallèles, donc $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.
   c) Les triangles ABD et BCD ont leur côté [BD] commun. D'autre part, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ d'une part, $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ d'autre part, sont égaux. Ces angles sont adjacents au côté [BD]. D'après le deuxième cas d'égalité des triangles (aussi appelé $\mathcal{ACA}$, Angle-Côté-Angle), ABD et BCD sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AB et CD sont de même longueur.
   d) On a montré que AB=CD. D'autre part, les côtés AD et BC sont homologues dans la paire de triangles égaux formée par ABD et BCD. Donc AD=BC.
2. Considérons les triangles ABD et BCD. Le côté [BD] est commun à ces deux triangles. De plus, AB=CD d'une part, et AD=BC d'autre part. D'après le premier cas d'égalité des triangles (aussi appelé $\mathcal{CCC}$, Côté-Côté-Côté), ABD et BCD sont égaux. Mais alors, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux. Or ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AB) et (CD). Donc ces droites sont parallèles. D'autre part, les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux. Or ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AD) et (BC). Donc ces droites sont parallèles.
3. a) Nous savons que AB=CD. De plus, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont alternes-internes formés par la sécante commune (BD) aux droites (AB) et (CD) qui sont parallèles. Donc ces angles sont égaux. D'autre part, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont alternes-internes formés par la sécante commune (AC) aux droites (AB) et (CD) qui sont parallèles. Donc ces angles sont égaux. D'après le deuxième cas d'égalité des triangles, ABI et CDI sont égaux.
   b) Les triangles ABI et CDI sont égaux. Les côtés [AI] et [IC] d'une part, [BI] et [ID] d'autre part, sont homologues dans cette paire de triangles. Ils sont donc égaux : AI = IC et BI = ID. Puisque I est sur $[AC]$, c'est le milieu de $[AC]$ et puisque I est sur [BD], c'est le milieu de [BD].
4. Soit I l'intersection des diagonales de ABCD. Nous savons que $AI = IC$ et $BI = ID$. De plus, les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{CID}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. D'après le troisième cas d'égalité des triangles, les triangles AIB et CID sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AB et CD sont de même longueur.



Montrons maintenant que $AD = BC$. Nous savons que $AI = IC$ et $BI = ID$. De plus, les angles $\widehat{BIC}$ et $\widehat{DIA}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. D'après le troisième cas d'égalité des triangles, les triangles BIC et DIA sont égaux. En particulier, leurs côtés homologues AD et BC sont de même longueur.

Nous avons redémontré toutes les propriétés du parallélogramme !

La terminologie de « cas d'égalité des triangles » ainsi que de « triangles égaux » est sans doute la plus fidèle aux diverses transcriptions d'Euclide. Néanmoins, le mot égalité est à prendre ici dans un sens faible, et l'on ne saurait, par exemple, écrire $ABI = CID$ *dans l'exercice précédent (l'écriture correcte correspondrait à introduire une nouvelle lettre pour désigner la* symétrie *de centre* I*, et à l'appliquer à l'un des deux triangles). La même difficulté se présente avec les angles, pour lesquels la notation est même ambigüe :* $\widehat{BIA}$ *désigne un secteur angulaire quand il est pris séparément dans une phrase, par exemple « Considérons la bissectrice de* $\widehat{BIA}$ *», et un angle quand il figure dans une égalité, par exemple* $\widehat{BIA} = \widehat{CID}$.

Solution de l'exercice 8

1. On va décrire trois procédures, qu'on appellera I, II et III.

   I : Placer deux points A et B distincts sur la droite Δ. Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB, dans la direction approximative de AB et le sens de A vers B. Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon AC, dans la direction approximative de AC et le sens de A vers C. Marquer l'intersection D de ces deux arcs de cercles. Tracer la droite (CD) ; c'est la parallèle recherchée.

   II : Placer deux points A et B distincts sur la droite Δ. Placer le milieu I de $[BC]$. (C'est l'intersection de $[BC]$ avec sa médiatrice, qu'on supposera savoir tracer). Tracer le symétrique D de A par rapport à I. Tracer la droite (AD) ; c'est la parallèle recherchée.

   III : Tracer la perpendiculaire Π à Δ passant par C. Tracer la perpendiculaire à Π passant par C. C'est la parallèle recherchée.

2. **I :** On a utilisé que si dans un quadrilatère non croisé les côtés opposés sont de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme et les côtés opposés sont parallèles.

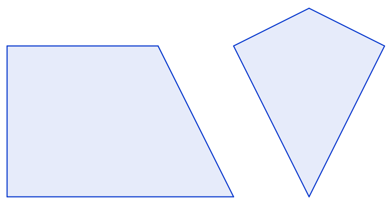
   II : On a utilisé que si dans un quadrilatère non croisé les diagonales se coupent leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme et les côtés opposés sont parallèles.

   III : On a utilisé que si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

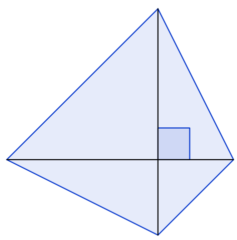
3. Contrairement peut être aux apparences, c'est la procédure III qui est la plus longue à mettre en oeuvre. La procédure I, si elle est bien menée, est en principe la plus rapide. Les justifications des procédures I et II font appel aux propriétés du parallélogramme, et donc en définitive à la gymnastique des angles alternes-internes, et sont donc a priori un peu plus difficiles que celles de la procédure III. La propriété sous-jacente à la procédure III peut être vue comme un cas particulier de la situation des angles alterne-internes où les angles en présence sont droits.

Solution de l'exercice 9

1. On a 10 choix possible pour la première étiquette, 9 pour la deuxième. Mais l'odre des étiquettes choisies n'est pas important. Le nombre de choix possibles est donc
$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$
2. a) Les deux configurations possibles sont les suivantes, selon que les angles droits sont adjacents à un même côté ou bien non.



   b) à vos équerres !
3. « Deux angles droits seulements » est compatible : penser à un trapèze rectangle qui n'est pas un rectangle. « Côtés égaux deux à deux » est **incompatible** : cela implique d'être un parallélogramme, donc deux paires de côtés opposés sont parallèles et non une seule. De même, « Quatre côtés égaux » est incompatible, car cela implique d'être un losange. « Diagonales perpendiculaires » ou bien « Deux côtés égaux seulement » ou encore « diagonales égales » sont compatibles, comme en témoigne le quadrilatère ci-dessous.



   « Quatre angles droits » implique d'être un rectangle, donc un parallélogramme. C'est donc incompatible. De même avec « côtés opposés parallèles » ou « Diagonales se rencontrant en leur milieu ».
4. On peut montrer que EFGH est un carré. Voici un résumé du raisonnement nécessaire (qui doit être plus long pour être complet) :
   — On montre que les côtés de EFGH sont deux à deux parallèles aux diagonales de ABCD. Puisque les diagonales sont perpendiculaires, ABCD est un rectangle.
   — On montre que les côtés de EFGH ont pour longueur les moitiés des longueurs des diagonales. Comme les diagonales sont de même longueur, ABCD est un losange.

Solution de l'exercice 10

1. Par construction ECFM possède les 3 angles droits $\widehat{ECF}$, $\widehat{MEC}$ et $\widehat{MFC}$. Or un quadrilatère qui possède 3 angles droits est un rectangle. Donc ECFM est un rectangle.
2. ECFM est un rectangle, en particulier, c'est un prallélogramme. Donc quelle que soit la position de M, $EC = FM$.

Solution de l'exercice 11

Etant donné que $ABCD$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux. Si donc deux de ses côtés adjacents sont de même longueur, alors tous ses cotés sont de même longueur, c'est donc un losange. De plus, $ABCD$ est un parallélogramme qui possède un angle droit. C'est donc un rectangle. Finalement, $ABCD$ est un carré.

Solution de l'exercice 12

1. Introduisons le point F tel que O est le milieu de [CF]. Alors les diagonales de ACBF sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc ACBF est un rectangle ; en particulier, ABC est un triangle rectangle.
2. Il s'agit d'un triangle equilatéral. En effet OC= 4 cm car C est sur le cercle $(\mathcal{C})$; AC) 4 cm d'après l'énoncé, et AO est la moitié de AB=8 cm.
3. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire, il est plus commode d'utiliser le théorème des milieux (pas encore revu) pour cette question
4. Les triangles AOC et ABD sont semblables, et le premier est équilatéral. Donc le second aussi ?
5. La droite (BC) passe par le milieu du segment [AB] et lui est perpendiculaire d'après la question 1. C'est donc sa médiatrice.
6. ABDE est un losange. En effet, ses diagonales se coupent en leur milieu, et sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 13

Les droites (AE) et (BC) sont parallèles, et les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{EBA}$ sont alterne-internes par rapport à la sécante (EB). Ils sont donc de même mesure. D'autre part, puisque [BE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, nous avons que $\widehat{EBA} = \widehat{EBC}$. On en déduit que le triangle ABE possède deux angles égaux, il est donc isocèle.

Solution de l'exercice 14

Les triangles ADE et DCF sont isocèles. Utilisant que la somme des angles de chacun est $180°$, on trouve que $\widehat{CDF} = 15°$ et $\widehat{EDA} = 75°$. Donc

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDF} = 15°.$$

Or ces angles sont correspondants pour les droites (DE) et (DF) et leur sécante commune (DC). On en déduit que (DE) et (DF) sont parallèles ; mais puisqu'elles ont en commun le point D, (DE) = (DF).

Solution de l'exercice 15

1. Quand nous formons un parallélogramme dont A, B et C sont des sommets, on peut se poser la question suivante : lequel, parmi $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, ne sera pas un côté de notre parallélogramme ?
   — Si $[AB]$ n'est pas un côté, alors c'est une diagonale. On a deux manières de construire ce parallélogramme : Ou bien on marque le milieu I de $[AB]$ et on place le symétrique de A par rapport à I. C'est le quatrième point. Ou bien on trace deux arcs de cercles, de centres A et B et de rayons BC et CA respectivement, dont l'intersection est le quatrième point (voir la procédure I de l'exercice 3).

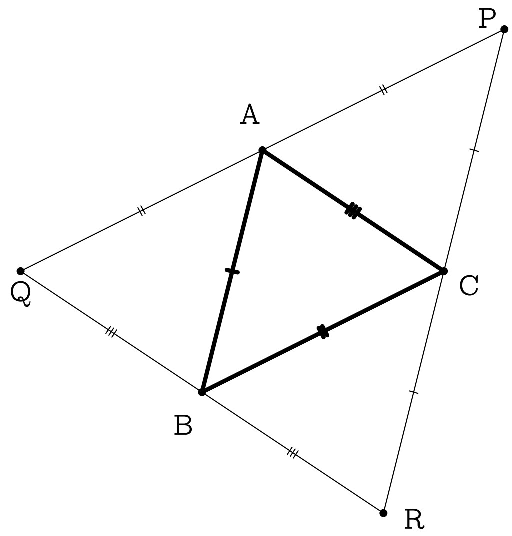
Le fait qu'il existe une procédure de construction montre qu'il existe un unique parallélogramme avec la propriété demandé.

— Si [BC] n'est pas un côté, alors c'est une diagonale. On a deux manières de construire ce parallélogramme comme précédemment, et le fait qu'il existe une procédure de construction montre qu'il existe un unique parallélogramme avec la propriété demandé.

— De même si [CA] n'est pas un côté.

On trouve donc trois parallélogrammes.

2. Voir la figure.



3. a) Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A. Etant donné que ABRC est un parallélograme, (AB) et (PR) sont parallèle. Donc (PR) est aussi perpendiculaire à la hauteur issue de A. De plus, cette dernière passe par le milieu de [PR]. C'est donc la médiatrice de [PR].

   On peut reproduire le même raisonnement avec les trois parallélogrammes construits aux questions précédentes. On en déduit que chaque hauteur de ABC est une médiatrice de PQR.

   b) D'après l'exercice 1 les médiatrices de PQR sont concourantes. Donc les hauteurs de ABC sont concourantes.

4. a) Les médianes de ABC sont exactement les diagonales des trois parallélogrammes ABRC, BCPA et CAQB construits à la question 2 qui ne sont pas des côtés du triangle ABC. Puique A, B et C sont les milieux de [PQ], [QR] et [RP], ce sont aussi les médianes du triangle PQR.

   b) Étant donné que ABC et PQR ont les mêmes médianes, et que

$$BG = \frac{PG}{2},\ AG = \frac{RG}{2},\ \text{et } CG = \frac{QG}{2},$$

   PQR s'envoie sur ABC par une homothétie de centre G qui envoie H sur O. On en déduit que les points G, H et O sont alignés. *On appelle droite d'Euler la droite sur laquelle se situent* G, H *et* O. *On trouvera la droite d'Euler sur la Figure 2.*

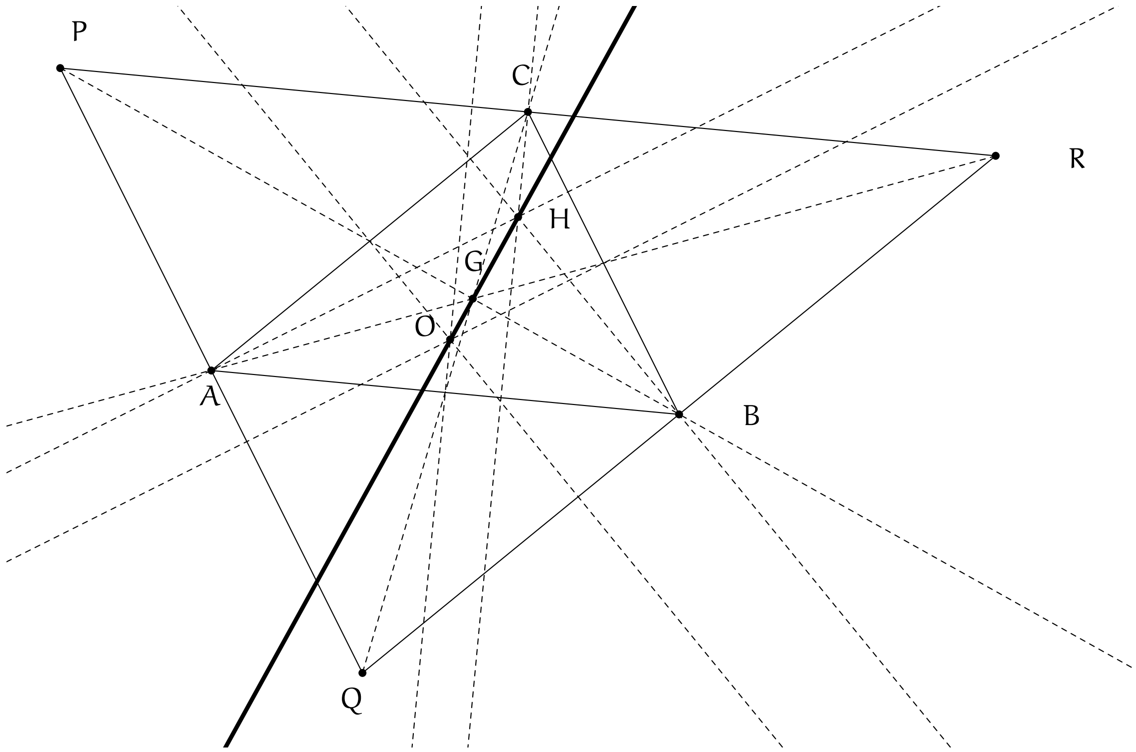


FIGURE 2. La droite d'Euler

Le

Afin de faire émerger et d'enrichir les concepts géométriques, le programme invite à proposer différents types de tâches aux élèves :

Reconnaître : Identifier, de manière perceptive, en utilisant des instruments ou en utilisant des définitions et des propriétés, une figure géométrique plane ou un solide. *Reconnaître qu'un quadrilatère est un rectangle*

Nommer : utiliser à bon escient le vocabulaire géométrique pour désigner une figure géométrique plane ou solide ou certains de ses éléments. *Nommer différents éléments d'un disque : rayon, diamètre, centre.*

Décrire : élaborer un message en utilisant le vocabulaire géométrique approprié et en s'appuyant sur les caractéristiques d'une figure géométrique pour en permettre sa représentation ou son identification. *Jeu du portrait.*

Construire : réaliser une figure géométrique plane ou un solide à partir d'un programme de construction, un texte descriptif, une figure à main levée, etc.

Représenter : reconnaître ou utiliser les premiers éléments de codage d'une figure géométrique plane ou de représentation plane d'un solide (perspective, patron)

Reproduire : construire une figure géométrique à partir d'un modèle fourni avec les mêmes dimensions ou en respectant une certaine échelle. *Reproduire une figure complexe en la décomposant en plusieurs figures simples.*

Classer : regrouper des objets par catégories, suivant une propriété commune *Différencier les rectangles parmi un ensemble de figures géométriques*

Vérifier : s'assurer, en recourant à des instruments ou à des propriétés, que des objets géométriques vérifient certaines propriétés (point alignés, droites perpendiculaires etc.à ou s'assurer de la nature d'une figure géométrique ou d'un solide.

Mercredi 10 février : Nombre

Exercice 16 Entiers, décimaux, fractions

Au tableau et au dos de cette feuille, on a représenté des poupées russes avec pour étiquettes suivantes (de la plus petite à la plus grande)
— les nombres entiers ;
— les nombres décimaux ;
— les nombres qu'on peut représenter comme des fractions (aussi appelés nombres rationnels) ;
— tous les nombres réels
Vous allez recevoir un nombre.

1. Placer votre nombre au tableau.
2. Mise en commun : est-on d'accord sur le placement de tous nos nombres ?

$\frac{22}{7}$	$3,14$	$12/4$	$0,33333333...$	$7,0$	$0,0002$
$355/113$	$1,999999...$	$\sqrt{2}$	2022	0	$\sqrt{4}$
$6,27999999...$	$35/2$	$577/408$	1 million	treize quarts	168

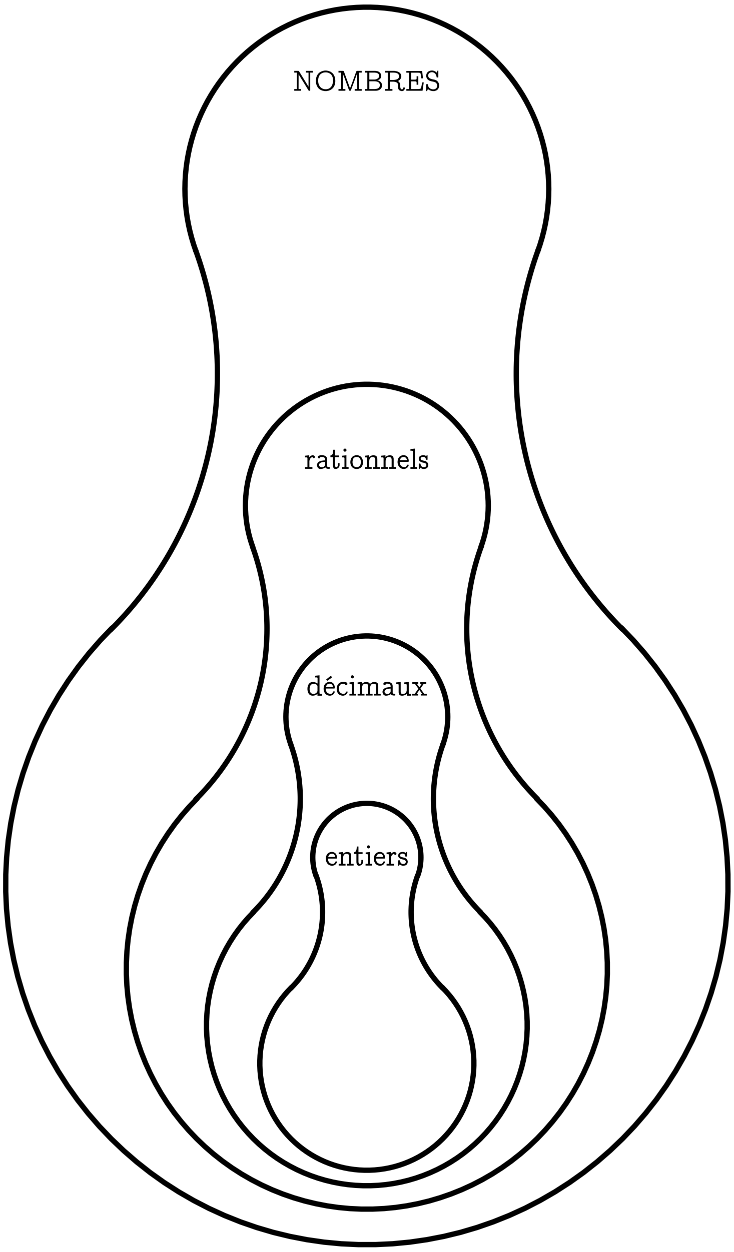
Exercice 17 Le format A4

1. Ecouter l'extrait de podcast sur les origines du format A4.
2. Quelle est l'aire d'une feuille A4 en cm^2 ? en millimètres carrés ? On procèdera de deux manières différentes :
   a) En s'aidant de la largeur et de la longueur, on exprimera le résultat sous forme de nombre décimal.
   b) En utilisant une information contenue dans le podcast, on exprimera le résultat sous forme de fraction.
3. La chambre de Léo est comme suit. Le sol a une forme carrée de côté 3,5m. Les murs sont de hauteur 2,3m. Il y a une fenêtre rectangulaire de côté 90cm et de hauteur 1,30m, et une porte de côté 90cm et de hauteur 2 mètres.
   a) Faire un croquis.
   b) Combien de feuilles A4 faut-il pour recouvrir les murs de la chambre de Léo ?
4. *En avance sur la proportionnalité, à regarder seulement si vous avez tout fini.*
   * a) Calculer $29,7^2 - 2 \times 21^2$ à l'aide de la calculatrice. Que constatez-vous ? Pourquoi ?
   * b) Léa veut obtenir une feuille rectangulaire de longueur $29,7$ cm telle que quand elle la coupe en trois dans le sens de la largeur, elle obtient trois plus petites feuilles à la même échelle. Quelle largeur doit-elle choisir ?

Exercice 18 Vrai ou faux ?

1. Vrai ou faux ?
   A. Entre deux entiers, je peux toujours en intercaler un troisième.
   B. Entre deux fractions qui représentent des nombres différents, on peut toujours intercaler une fraction.
   C. Entre deux fractions qui représentent des nombres différents, on peut toujours intercaler un nombre décimal.

2. Pour B., expliquer si c'est possible comment faire pour intercaler une fraction entre 355/113 et 22/7.

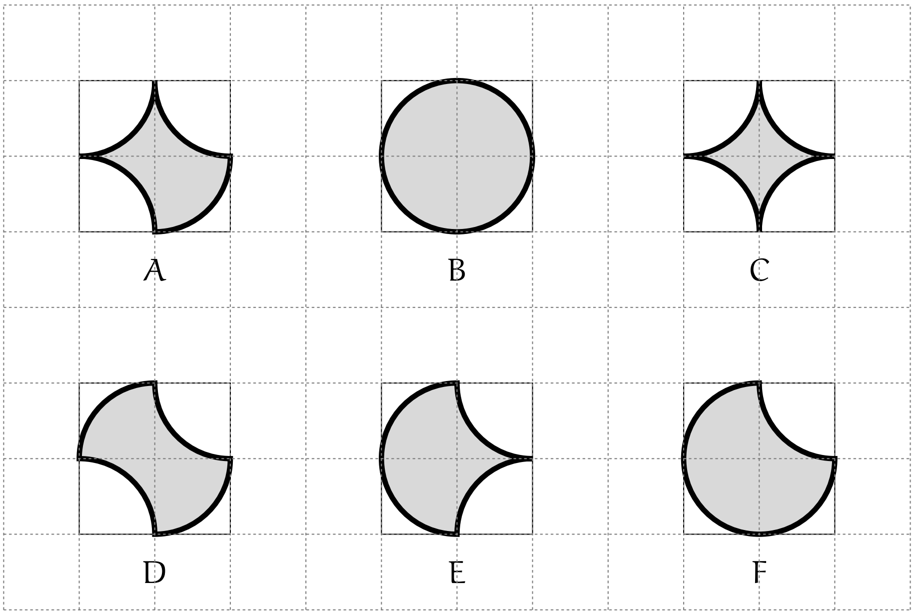


Exercice 19 (*CRPE Toulouse 1999, Dijon, Reims 2005*[4])

Partie I

4. Notre version est fortement inspirée de celle de Catherine Marchetti-Jacques, Fiche didactique CRPE maths 2014 disponible en ligne.

Un enseignant de CM2 décide de conduire des activités de mathématiques autour du matériel ci-dessous. Il s'agit de surfaces planes limitées par des arcs de cercle et inscrites dans des carrés de même dimension (de côté 4cm, mais cela n'est pas dit aux élèves). Il est sous-entendu que les centres et les rayons des arcs de cercle sont tels qu'ils sont perçus. Le matériel usuel de géométrie est mis à leur libre disposition à des fins de vérification si nécessaire.



1. L'enseignant veut faire ranger les formes selon leur **aire**.
   a) *Situation préliminaire à l'utilisation d'unité*. Décrivez une procédure possible.
   b) L'enseignant introduit deux unités de mesures, Q et S, qui sont les aires des figures ci-dessous dans des carrés de côté 2cm.

   i – Dans le cadre d'un jeu du portrait, comment décririez-vous ces deux surfaces ?
   ii – L'enseignant demande aux élèves d'exprimer les aires de A,B,C,D,E,F en fonction des unités d'aire Q et S.
   iii – L'enseignant précise que l'aire de Q est plus grande que celle de S, et demande de ranger les formes A,B,C,D,E et F par aire croissante. Donner les réponses attendues, justifier.
   iv – Comment peut-on faire constater aux élèves que Aire(S) < Aire(Q) ?
2. A présent l'enseignant souhaite comparer les **périmètres** des différentes surfaces.
   a) Quelle est la réponse spontanée et erronée qui sera vraisemblablement fournie par un bon nombre d'élèves ? Pourquoi ?
   b) L'enseignant propose alors aux élèves de comparer aire et périmètre des figures B et C. Justifier son choix.
   c) Proposez une procédure simple, pouvant être utilisé par les élèves pour effectuer cette comparaison.

3. L'enseignant demande alors aux élèves s'il est possible de dessiner une figure ayant la même aire que la figure B, avec un périmètre différent.
   a) Quel est son objectif ?
   b) Donnez une réponse possible en expliquant votre démarche.

Partie II

Ce document a été distribué à des élèves. Dans les annexes officielles, les mesures effectuées sur la photocopie donnée aux élèves correspondent aux résultats utilisés par les élèves

Les triangles A,B,C et D sont superposables.
L'aire de chacun est 6 cm^2

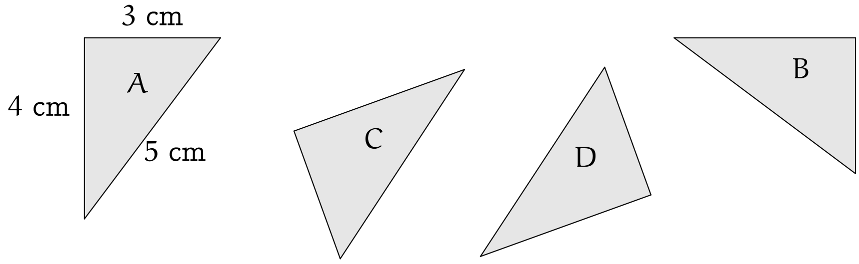
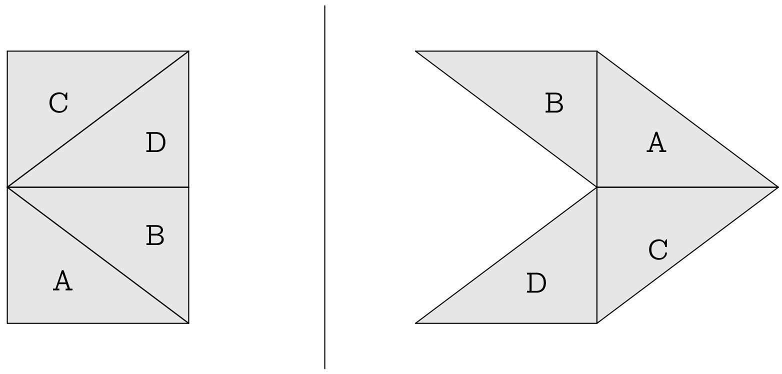


Figure 1 Figure 2



Ecrire les calculs permettant de trouver

a) Le périmètre de la figure 1

b) L'aire de la figure 1

c) Le périmètre de la figure 2

d) L'aire de la figure 2

1. Quelle est la règle implicite utilisée par l'élève A ?
2. Explicitez les connaissances sur lesquelles s'appuie l'élève B pour répondre aux questions a et c, puis celles qu'elle utilise pour répondre aux questions b et d
3. Interpréter la non-réponse en d) de l'élève C.
4. Donner deux interprétations possibles pour chacune des réponses b et d de l'élève D.

5. Au vu des productions de l'élève E, quelles connaissances a-t-elle des notions de périmètre et d'aire ?

Élève A : $(3 + 5 + 4) \times 4 = 42$ cm.

Élève B : a) $(3,2 + 4,8) \times 2 = 16$

b) $3,2 \times 4,8 = 15,36$

c) $3,2 + 4 + 4 + 3,2 + 4 + 4 = 22,4$

d) A et C on le met dans le trou entre B et D on obtiendra la même figure que la précédente, alors c'e $= 15,36$.

Élève C : b) $6 \times 4 = 24$

d) je ne sais pas calculer

Élève D : b) $6 \times 4 = 24$

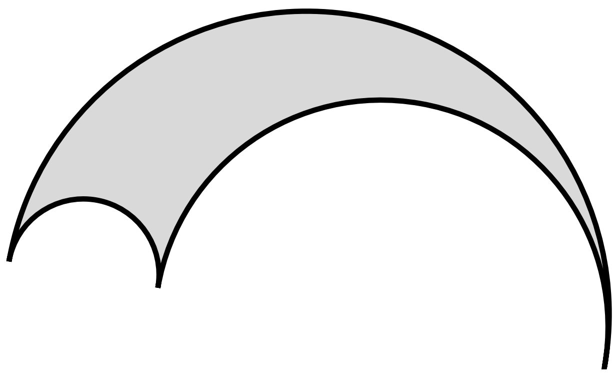
d) $6 \times 4 = 24$

Élève E : a) $(3,2 \times 2) + (4,8 \times 2) = 6,4 + 9,6 = 16$

b) $9,6 \times 6,4 = 61,44$

Exercice 20

La figure suivante est composée de trois demi-cercles de rayons 3, 9 et 12 cm, dont les centres sont alignés.



1. Calculer son périmètre, valeur exacte en cm, arrondie au mm près.
2. Calculer son aire, valeur exacte en cm^2, arrondie au mm^2 près.

* Exercice 21 Les lunes d'Hippocrate

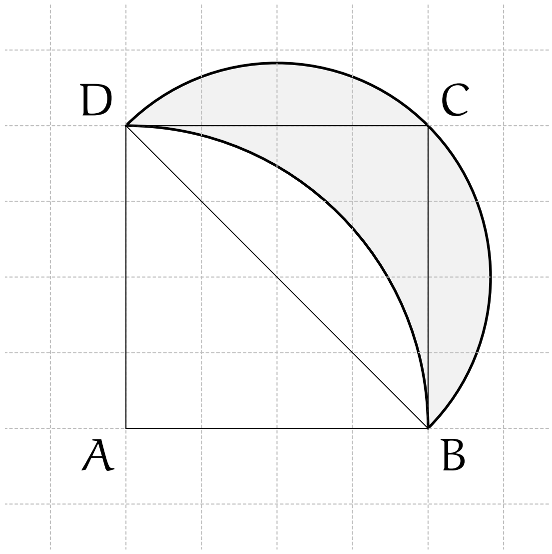
Prérequis pour cet exercice :

— Théorème de Pythagore (non absolument nécessaire, mais recommandé).

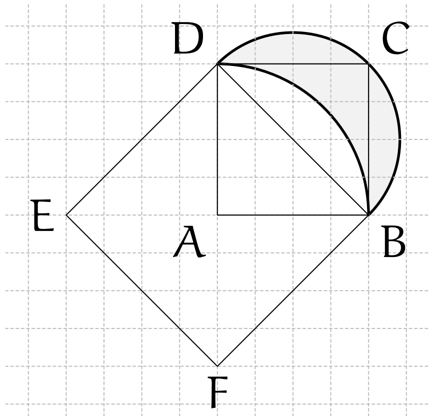
— Agrandissements et réductions.

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré. On forme une lunule dite d'Hippocrate[5] à partir de deux arcs de cercle. Le premier arc de cercle a pour centre A et pour rayon AB. Le second est une portion du cercle de diamètre $[BD]$.

5. Il s'agit d'Hippocrate de Chios, à ne pas confondre avec Hippocrate de Cos, le médecin.



1. On forme le carré BDEF comme suit :



   Comparer les aires du carré BDEF et du triangle ABD. En déduire que

$$Aire(BDEF) = 2 \times Aire(ABCD),$$

   puis que

$$\frac{BD}{CD} = \sqrt{2}.$$

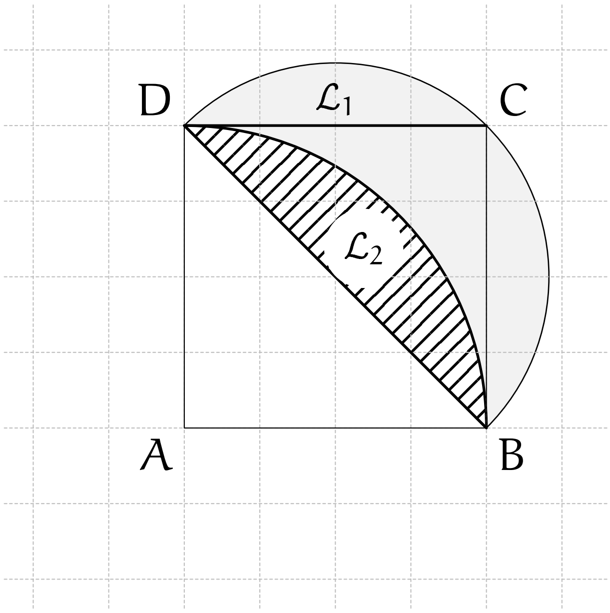
2. On considère les deux surfaces suivantes :

   (1) La portion $\mathcal{L}_1$ de la lune située au-dessus du segment BC.

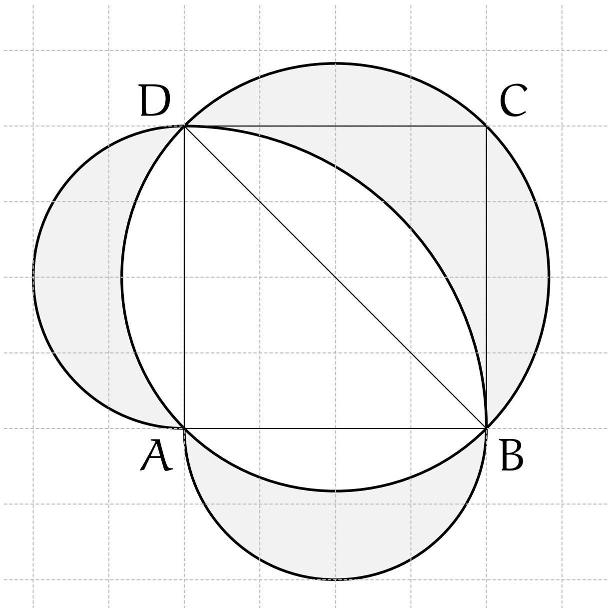
   (2) La portion $\mathcal{L}_2$ du triangle BCD située en dessous de la lune.

   Quel est le rapport d'agrandissement permettant de passer de $\mathcal{L}_1$ à $\mathcal{L}_2$? En déduire que

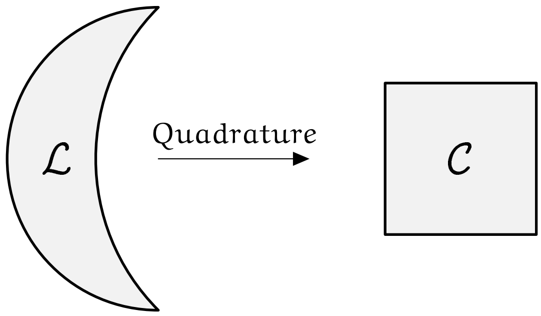
$$Aire(\mathcal{L}_2) = 2 \times Aire(\mathcal{L}_1).$$



3. Montrer que l'aire de la lune est égale à celle du triangle ABD (on pourra procéder par découpage et recollement).
4. On a formé deux petites lunes en complétant le cercle circonscrit au carré, et en traçant deux demi-dercles de diamètres AB et AC. Montrer que l'aire de la grande lune est égale à la somme des aires des petites lunes.



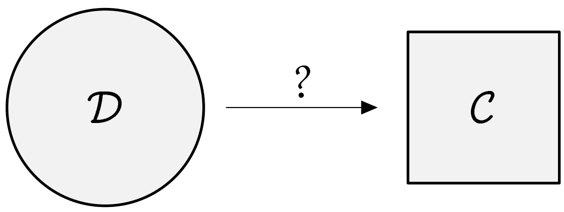
5. Étant donné une lune d'Hippocrate $\mathcal{L}$, décrire un procédé permettant de construire à l'aide de a règle et du compas un carré ayant la même aire. On dit qu'on a réalisé la quadrature de la lune.



Le problème historique de la quadrature du disque (ou de la « pleine lune ») s'est révélé impossible à la règle et au compas.

> *L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle. [...] Il existe un bruit populaire que les gouvernements ont promis des récompenses considérables à celui qui parviendrait à résoudre le problème de la quadrature du cercle, que ce problème est l'objet des recherches des géomètres les plus célèbres ; sur la foi de ces bruits, une foule d'homme beaucoup plus grande qu'on ne le croit renonce à des occupation utiles pour se livrer à la recherche de ce problème, souvent sans l'entendre, et toujours sans avoir les connaissances nécessaires pour en tenter la solution avec succès. [...] L'humanité exigeait donc que l'Académie, persuadée de l'inutilité absolue de l'examen qu'elle aurait pu faire des solutions de la quadrature du cercle, cherchât à détruire, par une déclaration publique, des opinions populaires qui ont été funestes à plusieurs familles.*

Académie Royale des Sciences, Comptes-Rendus, année 1775.

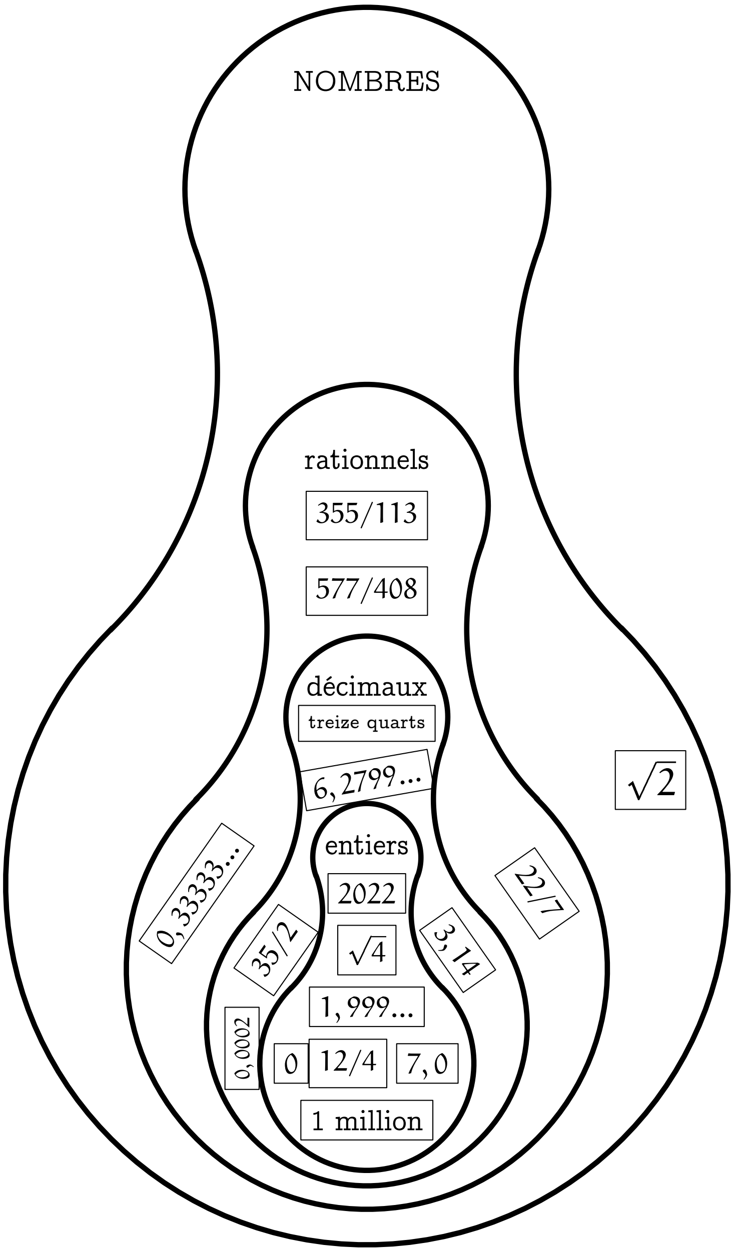


Solution de l'exercice 16

Les étiquettes qui représentent des nombres entiers sont $12/4 = 3$, $7,0 = 7$, $1,99999... = 2$, 2022, 0, $\sqrt{4} = 2$, 1 million = 1000000, 168.

Les étiquettes qui représentent des nombres décimaux non entiers sont : $3,14$, $0,0002$, $6,279999999...$, $35/2$, treize quarts.

L'étiquette $\sqrt{2}$ représente un nombre qui n'est pas rationnel (mais nous n'avons pas encore les moyens de le démontrer).



Solution de l'exercice 17

1. Dans vos oreilles !

2. a) L'aire de la feuille $A4$ est

$$29,7\,\text{cm} \times 21\,\text{cm} = 623,7\text{cm}^2.$$

C'est aussi

$$297\,\text{mm} \times 210\,\text{mm} = 62\,370\,\text{mm}^2.$$

On peut passer d'une unité de mesure à l'autre en utilisant le tableau de conversion :

	DM	**M**	**C**	**D**	**U**	**d**	**c**	**m**
Aire en cm^2			6	2	3	7		
Aire en mm^2	6	2	3	7				

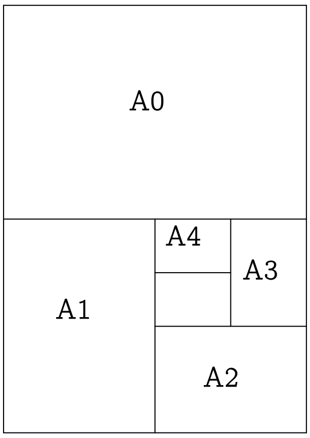
b) D'après le podcast, l'aire de la feuille $A0$ est $1\,\text{m}^2$. On a donc les aires suivantes

Format	Aire en mètres carrés
A0	1
A1	1/2
A2	1/4
A3	1/8
A4	1/16

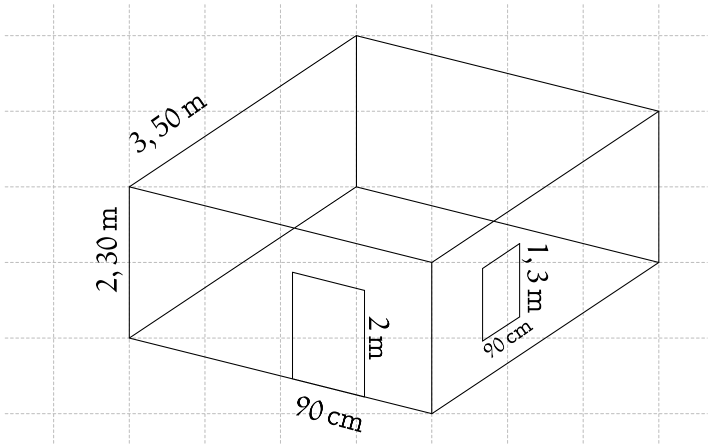
Il reste à traduire un seizième de mètre carré en centimètres carrés. On trouve

$$0,0625\,\text{m}^2 = 625\,\text{cm}^2$$

ce qui est légèrement différent !
On a dessiné ci-dessous à l'échelle les différents formats.



3. a) Voici un dessin en perspective cavalière (pas à l'échelle).



La chambre de Léo

b) Calculons l'aire des murs de la chambre.

(1) S'il n'y avait ni porte, ni fenêtre, cette aire serait

$$4 \times 2,30\,\mathrm{m} \times 3,50\,\mathrm{m} = 32,2\,\mathrm{m}^2.$$

(2) L'aire de la porte est

$$2\,\mathrm{m} \times 0,90\,\mathrm{m} = 1,8\,\mathrm{m}^2.$$

(3) L'aire de la fenêtre est

$$1,3\,\mathrm{m} \times 0,90\,\mathrm{m} = 1,17\,\mathrm{m}^2.$$

L'aire recherchée est donc

$$32,2\,\mathrm{m}^2 - 1,8\,\mathrm{m}^2 - 1,17\,\mathrm{m}^2 = 29,23\,\mathrm{m}^2.$$

Attention à ne pas confondre cette aire avec l'aire du sol, qui est elle égale à $12,25\,\mathrm{m}^2$. On peut ensuite conclure de deux manières différentes :
Premier calcul. On calcule que

$$29,23\,\mathrm{m}^2 \div 0,0625\,\mathrm{m}^2 = 467,68$$

Second calcul. On sait que 16 feuilles A4 couvrent exactement un mètre carré. On fait donc la multiplication

$$29,23 \times 16 = 467,68.$$

On trouve donc que <u>468 feuilles A4</u> sont nécessaires pour recouvrir les murs de la chambre.

Remarque : *Diviser par* $1/16$*, c'est comme multiplier par* 16*.*

4. a) On remarque que $29,7^2 - 2 \cdot 21^2 = 0,09$, ce qui est très petit. Cela est dû au fait que

$$\frac{29,7}{21} \approx \sqrt{2}$$

comme il est dit dans le podcast. Donc le carré de $29,7$ est presque le double de celui de 21.

b) On trouve $29,7/\sqrt{3} \approx 17,1\,\mathrm{cm}$.

Solution de l'exercice 18

1. A. Non B. Oui C. Oui

2. On commence par réduire au même dénominateur

$$\frac{22}{7} = \frac{22 \times 113}{7 \times 113} = \frac{2486}{791}$$

tandis que

$$\frac{355}{113} = \frac{355 \times 7}{113 \times 7} = \frac{2485}{791}$$

Ensuite, on remarque par exemple que

$$\frac{2485}{791} = \frac{24850}{7910} < \frac{24851}{7910} < \frac{24860}{7910} = \frac{2486}{791}.$$

Solution de l'exercice 19

Partie I

1. a) La technique de la superposition : une surface est plus grande pour l'aire qu'une autre si on arive à poser la première sur la deuxième sans dépasser ou, de manière équivalente, si on arrive à recouvrir complètement la seconde à l'aide de la première. Avec cette technique, on peut trouver que
— B recouvre F, donc B est plus grande que F.
— F recouvre D, donc F (et B) sont plus grandes que D.
— F recouvre aussi E, donc F (et B) sont plus grandes que E.
— D recouvre A, donc D (et aussi F et B) sont plus grandes que A.
— E également recouvre A.
— A recouvre C, donc A, E,D, F et B sont plus grandes que C.
On a résumé toutes ces relations "recouvre" par des flèches sur la figure suivante.

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dr] & & \\
B \arrow[r] & F \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \arrow[r] & C \\
 & & E \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Cela permet de ranger toutes les surfaces sauf la paire formée par D et E de la plus grande à la moins grande.

b) i – Q est un quart de disque. S est la surface qui reste quand on enlève à un carré un quart de disque formé sur deux côtés adjacents.

ii – Par S et Q on désigne les aires des surfaces S et Q.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(A) &= 3S + Q \\
\mathrm{Aire}(B) &= 4Q \\
\mathrm{Aire}(C) &= 4S \\
\mathrm{Aire}(D) &= 2S + 2Q \\
\mathrm{Aire}(E) &= 2S + 2Q \\
\mathrm{Aire}(F) &= S + 3Q.
\end{aligned}$$

iii – Afin de comparer deux surfaces en utilisant les décompositions de la question précédente, nous devons d'abord voir ce qu'elles ont en commun. *Il y a là une analogie, qui n'est d'ailleurs pas complètement formelle, avec le fait que pour comparer deux fractions une méthode est de les mettre préliminairement au même dénominateur.* Illustrons ceci sur l'exemple de F et D :

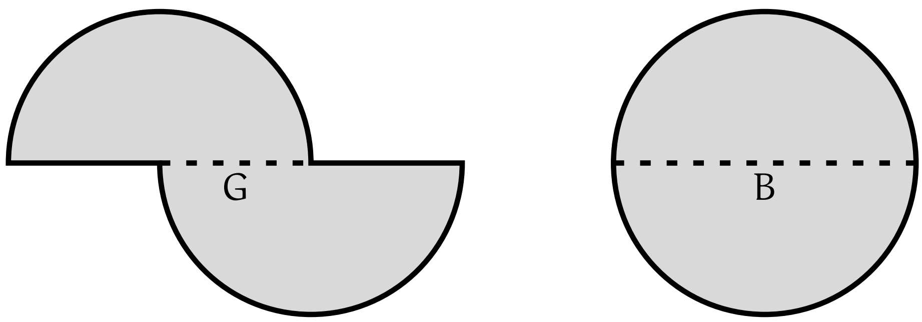
$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(D) &= 2S + 2Q = S + S + 2Q \\ &< Q + S + 2Q \\ &= S + 3Q = \mathrm{Aire}(F). \end{aligned}$$

Ici la partie commune est $S + 2Q$.
Finalement on montre ainsi que

$$\mathrm{Aire}(C) < \mathrm{Aire}(A) < \mathrm{Aire}(D) = \mathrm{Aire}(E) < \mathrm{Aire}(F) < \mathrm{Aire}(B).$$

iv – On peut utiliser la technique du recouvrement évoquée à la question 1.a).

2. a) La réponse spontanée est que l'ordre est le même. Quand on dit que A est plus grande que C, par exemple, il est sous-entendu que c'est pour l'aire.
   b) Les surfaces C et B sont extrêmes du point de vue de l'aire, ce sont la plus petite et la plus grande respectivement. Constater qu'elles ont même périmètre pourra d'autant mieux remettre en question la conception éventuelle que l'aire et le périmètre sont fonction l'un de l'autre.
   c) Il s'agit de découper le périmètre de chaque surface en quatre quarts de cercles de même rayon, et de faire ainsi constater que les périmètres sont tous les mêmes.
3. a) Il s'agit de remettre en question la conception éventuelle que l'aire détermine le périmètre (après avoir réfuté que le périmètre détermine l'aire à la question précédente).
   b) Voici deux surfaces de même aire et de périmètres différents.



Partie II

1. La règle implicite est que le périmètre d'un recollement est égale à la somme des périmètres de ses parties. Un tel principe vaut pour les aires, mais pas pour les périmètres.
2. Les mesures utilisées par l'élèves B s'appuient sur un instrument (règle graduée). Ce n'est pas ce qui est prévu dans le contrat didactique pour cet exercice.

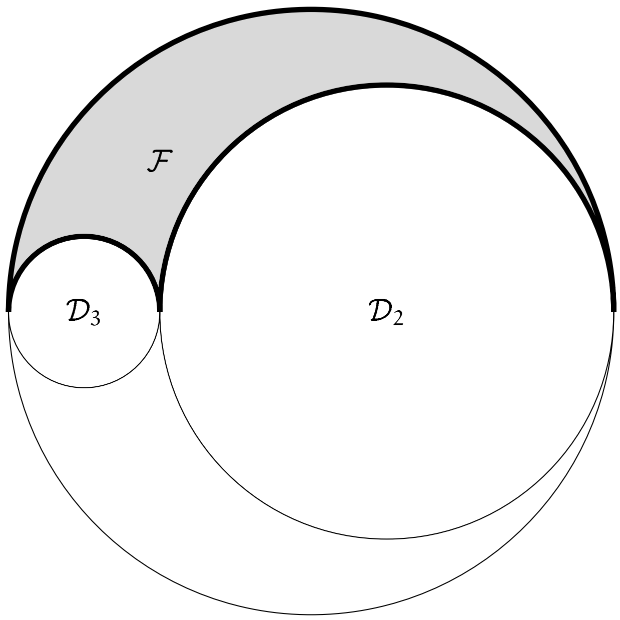
   Pour les questions a) et c) l'élève B utilise la définition du périmètre d'un domaine polygonal (somme des longueurs des côtés).

   Pour la question b), l'élève B utilise la formule donnant l'aire d'un rectangle à partir des longueur de ses côtés ; pour la question d) un découpage et recollement qui ramène au cas de la question b).
3. Pour la question d) un calcul ne suffirait pas, il faut procéder par exemple comme l'élève B (ou par somme). *Dans les séquences sur les grandeurs et mesure, il est recommandé de manipuler toujours d'abord les grandeurs en tant que telles, c'est à dire sans unités et a fortiori sans formules. Les mesures viennent ensuite.*

Solution de l'exercice 20

1. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ le grand, le moyen et le petit cercle à partir desquels est formé le périmètre de la figure de l'exercice. Alors le périmètre recherché est

$$\frac{1}{2}\left(2\pi \times 4\,\mathrm{cm}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi \times 3\,\mathrm{cm}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi \times 1\,\mathrm{cm}\right) 1 = 8\pi\,\mathrm{cm} = 25,1\,\mathrm{cm}.$$



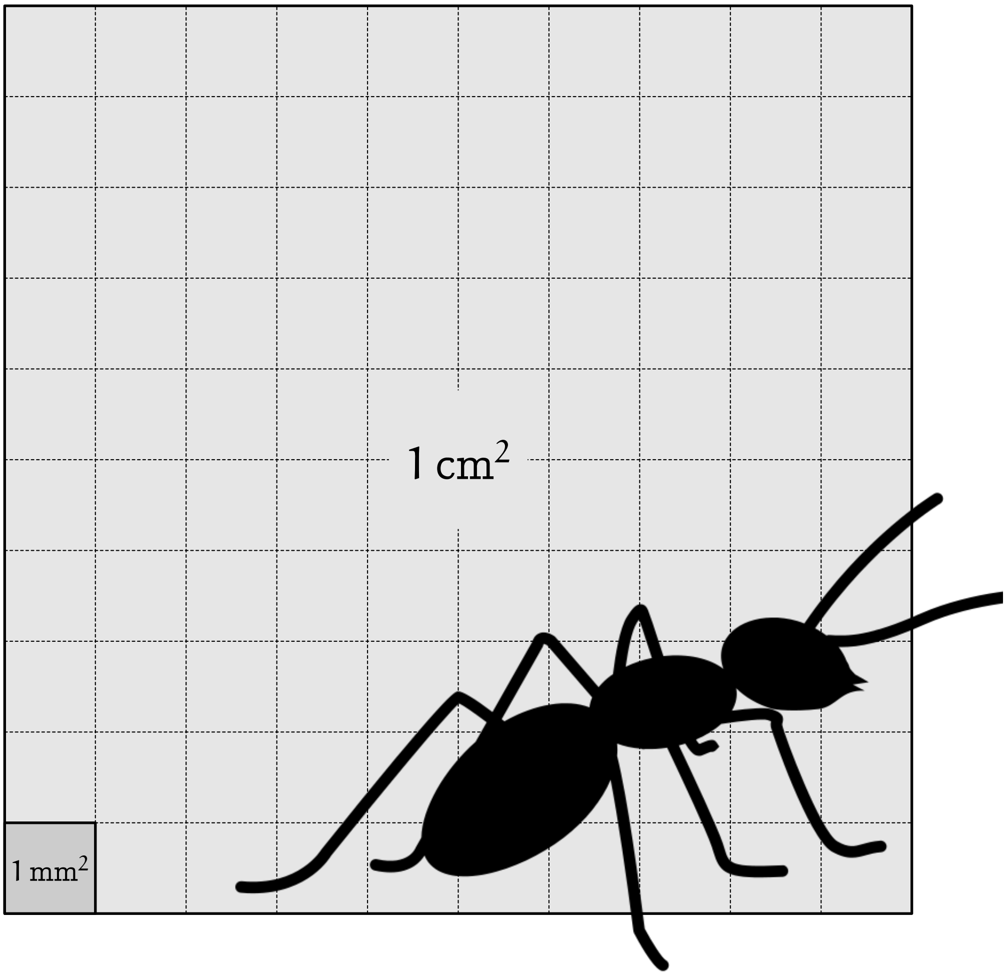
2. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ le grand, le moyen et le petit disque à partir desquels sont formés la figure de l'exercice. Alors par découpage

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Aire}(\mathcal{D}_1) - \mathrm{Aire}(\mathcal{D}_2) - \mathrm{Aire}(\mathcal{D}_3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi(4\,\mathrm{cm})^2 - \pi(3\,\mathrm{cm})^2 - \pi(1\,\mathrm{cm})^2\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(16 - 9 - 1\right)\ \mathrm{cm}^2 \\
&= 3\pi\,\mathrm{cm}^2 \\
&= 9,42\,\mathrm{cm}^2.
\end{aligned}$$

Quelques précisions : quand le périmètre est demandé au millimètre près, on se contente du chiffre des dizièmes du résultat approximé et exprimé en centimètre. Quand l'aire est demandée au millimètre carré près, on doit donner le chiffre des centièmes du résultat approximé et exprimé en centimètre carrés. En effet

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{mm} &= 0,1\,\mathrm{cm} \\
1\,\mathrm{mm}^2 &= 0,01\,\mathrm{cm}^2.
\end{aligned}$$

Ces conversions peuvent se comprendre à l'aide du dessin suivant : dans un centimètre carré, on peut placer $10 \times 10 = 100$ millimètres carrés.

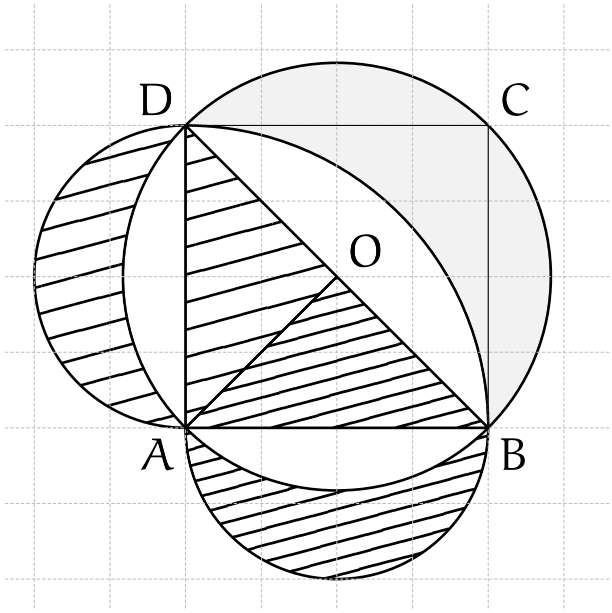


L'exercice suivant explore encore un peu plus loin l'effet d'un agrandissement sur les aires (notion de cycle 4).

Solution de l'exercice 21

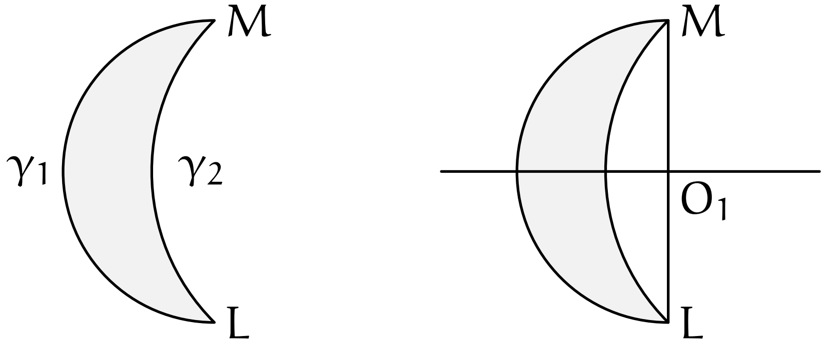
1. Par découpage,
$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(BDEF) &= \mathrm{Aire}(ABD) + \mathrm{Aire}(ADE) + \mathrm{Aire}(AEF) + \mathrm{Aire}(AFB)\\ &= 4 \times \mathrm{Aire}(ABD)\end{aligned}$$
tandis que $\mathrm{Aire}(ABCD) = \mathrm{Aire}(ABD) + \mathrm{Aire}(CDB) = 2 \times \mathrm{Aire}(ABD)$. On en déduit que $\mathrm{Aire}(BDEF) = 2 \times \mathrm{Aire}(ABCD)$. Donc
$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{BD^2}{CD^2} = \frac{\mathrm{Aire}(BDEF)}{\mathrm{Aire}(ABCD)} = 2.$$
Ceci prouve que $\frac{BD}{CD} = \sqrt{2}$.
2. Le rapport d'agrandissement est $\sqrt{2}$. On en déduit que
$$\frac{\mathrm{Aire}(\mathcal{L}_2)}{\mathrm{Aire}(\mathcal{L}_1)} = \sqrt{2}^2 = 2.$$
3. Notons $\mathcal{L}$ la lune d'Hippocrate. Par découpage et recollement,
$$\mathrm{Aire}(\mathcal{L}) + \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_2) - 2 \times \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{Aire}(BCD) = \mathrm{Aire}(ABD).$$

4. Soit O le milieu de [AB]. L'aire de la lune formée sur [AD] est égale à celle du triangle AOD. L'aire de la lune formée sur [AB] est égale à celle du triangle AOB (voir ci-dessous).

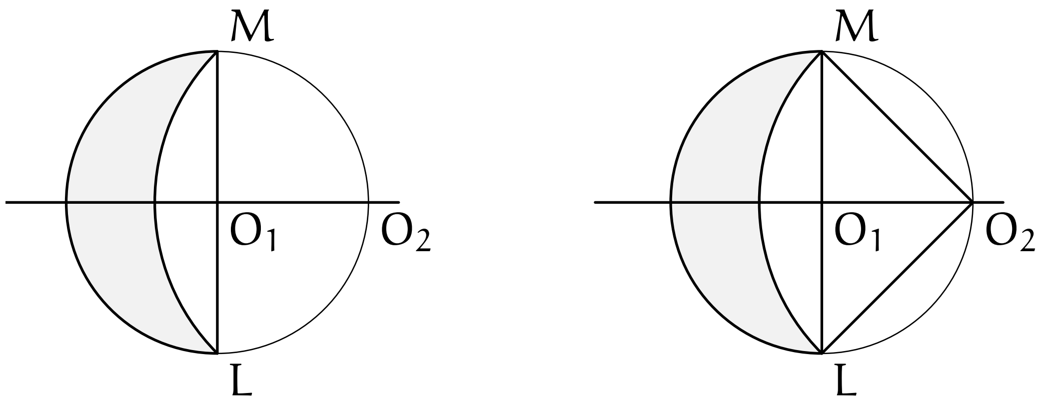


5. La lune $\mathcal{L}$ est délimitée par deux arcs de cercles γ_1 et γ_2 comme ci-dessous. D'après les questions précédentes, on sait tracer un triangle dont l'aire est celle de la lune. Ce triangle a pour sommets les deux extrémités communes L et M des arcs γ_1 et γ_2, et le centre O_2 de γ_2.

   A l'aide de la règle et du compas, nous pouvons tracer le segment [LM] d'une part, la médiatrice de L et M d'autre part. Ce segment et cette droite s'intersectent au point O_1 centre de l'arc γ_1.



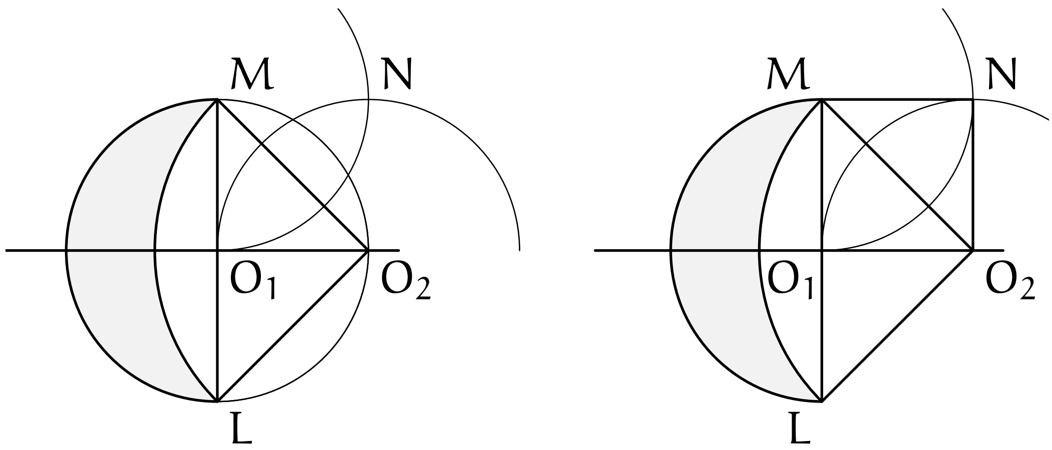
   Le cercle de centre O_1 et de rayon O_1L prolonge l'arc γ_1 et intersecte la médiatrice de L et M en deux points, l'un étant situé sur l'arc γ_1 et le second étant le point O_2. Le point O_2 est ainsi construit.



D'après la question 3, l'aire de la lune est égale à celle du triangle LO_2M.

Soit N le point tel que MO_1O_2N est un carré (on peut construire N en construisant la parallèle à O_1O_2 passant par M avec la méthode du parallélogramme vue dans la fiche de géométrie plane). Alors $Aire(MO_2N) = Aire(O_1O_2L)$, donc

$$Aire(\mathcal{L}) = Aire(MO_1O_2N).$$



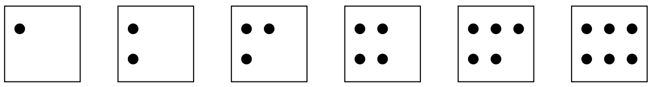
Mercredi 16 mars : Nombre

Exercice 22 (*CRPE 2018 groupement 2*[6])

Voici un extrait des programmes de l'école maternelle, d'après le Bulletin Officiel numéro 2 du 26 mars 2015.

> *La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois.*
>
> *Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités [...], la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. [...] Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur les quantités jusqu'à dix.*

1. Citer deux procédures qu'une élève de fin de petite section peut utiliser pour affirmer qu'une collection est constituée de trois objets.
2. Proposer une activité à mettre en place en moyenne section pour travailler les décompositions du nombre quatre.
3. Un enseignant de grande section décide d'utiliser avec ses élèves un dé dont les faces sont représentées de la façon suivante.



Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser un tel dé ?

Exercice 23 (*CRPE 2019 groupement 4*)

Dans une classe de moyenne section, par groupes de trois, des élèves jouent avec l'enseignant à un jeu où chaque tour, elles prennent le nombre de jetons indiqué par la constellation d'un dé de 1 à 6.

L'enseignant observe les procédures suivantes.

— **Anissa** prend directement le nombre de jetons correspondant à la constellation du dé.

— **Elvina** prend une poignée de jetons, les organise à l'identique de la constellation du dé, puis repose l'excédent sans procédure numérique apparente.

— Quand il obtient 1, 2 ou 3, **Martin** prend le nombre de jetons correspondant ; quand il obtient 4, 5 ou 6 il compte en posant son doigt sur chaque point de la constellation du dé et prend un jeton.

1. Quelle notion mathématique ce jeu permet-il de travailler ?
2. Proposer des stratégies que les élèves pourraient utiliser.
3. Proposer deux modifications du jeu que peut proposer l'enseignant afin de rendre la tâche plus complexe pour Anissa.
4. Proposer une modification du jeu que peut proposer l'enseignant pour qu'Elvina mobilise d'autres stratégies.

6. D'après les annales de la COPIRELEM éditées par l'Arpeme.

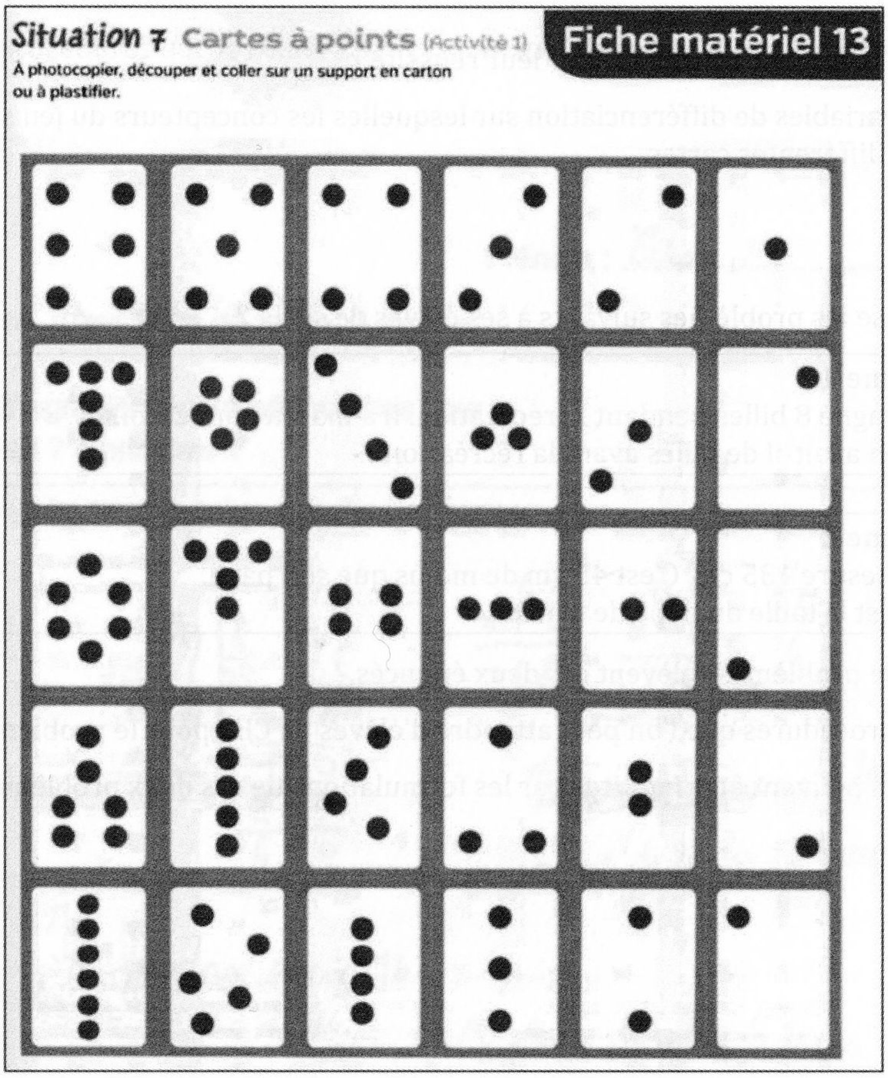
5. L'enseignant fait évoluer le jeu en proposant deux dés dont les faces sont marquées avec des chiffres de 1 à 3. Les élèves doivent prendre le nombre de jetons correspondants à la somme des deux dés. Que permettrait de faire travailler aux élèves cette nouvelle situation que ne faisait pas travailler la situation avec un dé unique ?

Exercice 24 (*adapté de CRPE 2018 groupement 4*)

L'activité suivante, intitulé « Cartes à points », est extraite de l'ouvrage « Découvrir les maths Situations MS », Nouvelle édition, programme 2015, Hatier. Elle a été conçue par Dominique Valentin, Marie-Hélène Salin, Dominique Verdenne et Roland Charnay.

Le matériel est le suivant.

(A) Une vingtaine de cartes à points sur lesquelles on a collé de 1 à 6 gommettes réparties de différentes façons, l'une étant celle qui correspond à la configuration du dé (voir la fiche matériel ci-dessous).



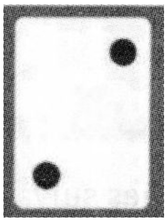
(B) Un petit plateau par enfant (ou une petite boîte).

(C) Une soixantaine de jetons, tous identiques, et dont la taille est proche de celle des gommettes.

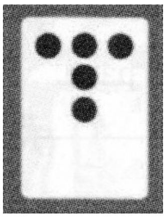
La règle du jeu est la suivante.

Les cartes sont disposées en tas à l'envers devant cinq joueurs. Chaque enfant tire une carte et prend dans la corbeille autant de jetons qu'il y a de gommettes sur la carte. En cas de réussite, il verse les jetons sur son plateau et garde la carte. Sinon il remet les jetons dans la corbeille et remet la carte à l'envers dans le paquet commun.

1. Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-dessous.



2. a) Même question que 1. avec la carte ci-dessous.



   b) Pour chacune des procédures données, décrire une erreur que les élèves sont susceptibles de faire.
3. Comment les élèves peuvent-elles valider leur réussite ?
4. Donner trois variables de différenciation sur lesquelles les conceptrices du jeu se sont appuyées pour construire les différentes cartes.

Solution de l'exercice 22

(Certains éléments de solutions repris d'après les annales de l'Arpeme.)

1. Procédures possibles en fin de PS pour le nombre 3 :

   (1) Si la collection est disposée comme la constellation « trois » du dé préalablement travaillée en classe, identifier cette constellation.

   (2) Etablir une correspondance terme à terme avec une collection dont on connaît le nombre d'objets (par exemple les doigts).

   (3) Mettre en oeuvre un dénombrement de cette collection : énumérer en posant le doigt sur chaque objet tour à tour sans en oublier et sans poser le doigt deux fois sur le même objet. Dire en même temps le mot-nombre dans l'ordre « un, deux, trois ». Puis, reprendre le dernier mot-nombre énoncé : il y a trois objets.

   (4) Le *subitizing*. C'est possible pour une collection de 3 éléments au terme de l'acquisition.

   Il convient de savoir différencier les procédures (2) et (3) qui peuvent se ressembler a priori du point de vue de l'adulte, mais dont la confusion mène à des erreurs d'appréciation. Voir par exemple à ce sujet Brissiaud, *Représentation analogique par une collection témoin et représentation numérique*, in « Comment les enfants apprennent à calculer », Retz, 1989. La figure 1 est extraite de ce livre.
2. Quelques propositions d'après le corrigé de l'Arpeme :
   — Une situation rituelle collective de petites comptines mettant en scène certaines décompositions de quatre, par exemple « deux éléphants sur un vélo, deux éléphants dans une auto, ces quatre éléphants sont beaucoup trop gros ! »

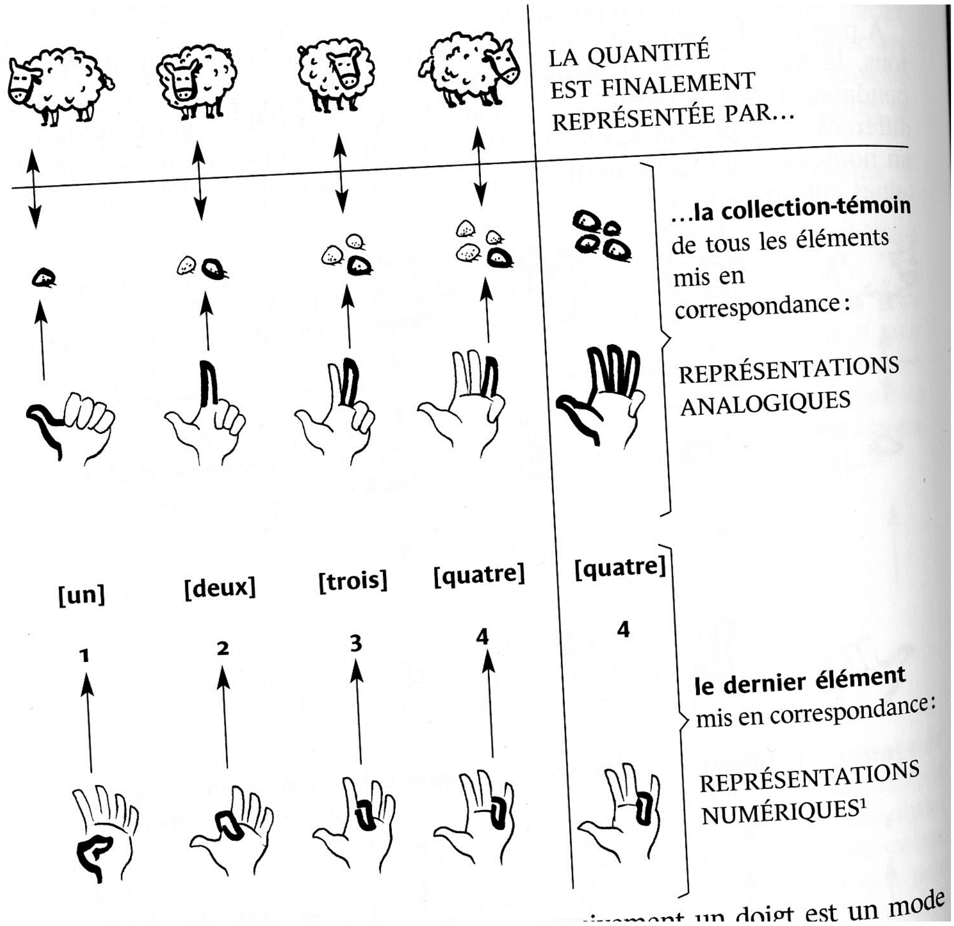


FIGURE 3. Modes de représentation d'une collection de quatre moutons avec les doigts de la main (R. Brissiaud, Comment les enfants apprennent à calculer, Retz, 1989).

— activité à deux dans laquelle un élève montre aucun un deux, trois ou quatre doigts, et le second élève doit montrer le nombre de doigts nécessaires pour qu'au final on puisse compter quatre doigts.
  Variante : demander aux élèves d'aller chercher en une fois par groupes de deux juste ce qu'il faut de couverts et d'assiettes pour le goûter de poupées.
— atelier dirigé : l'enseignant propose quatre objets, en cache une partie et demande aux élèves le nombre d'objets cachés.
— proposer en atelier dirigé un jeu de domino du quatre (dans lequel on aurait enlevé tous les dominos avec une de leurs deux constellations au moins égale à cinq).

3. L'intérêt de ces dés est qu'ils représentent les nombres d'une manière différente de la constellation standard.
   Les nombres pairs ou impairs sont clairement distingués.
   Les décompositions de 1, 2 , 3, 4, 5 et 6 que la disposition spatiale des points fait apparaître sont différentes des décompositions classiques.
   De plus, l'ordre des nombres est apparent (les collection de points correspondants au nombres précédents sont gardés à la même place).

EXERCICE DU CC1

Exercice 25 Exercice 3 du CC1

Sujet et corrigé rédigés exclusivement pour le groupe de renforcement maths en vue de la séance du 9 mars et sans aucune valeur contractuelle.

En grande section de maternelle, un enseignant propose à ses élèves de jouer à la bataille, jeu de cartes.

Règles du jeu

— La valeur d'une carte correspond au nombre d'éléments sur la carte

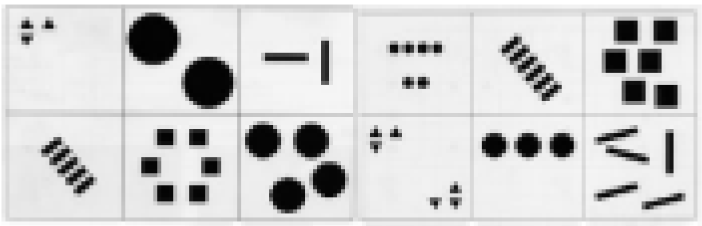
— Chaque joueur dispose de 6 cartes.

— Les deux joueurs retournent une carte de leur jeu à chaque tour.

— Le joueur qui a retourné la carte dont la valeur est la plus grande remporte les deux cartes

— Le jeu se termine quand un joueur n'a plus de cartes.

1. L'enseignant propose d'abord à ses élèves de jouer avec le jeu de cartes suivant.



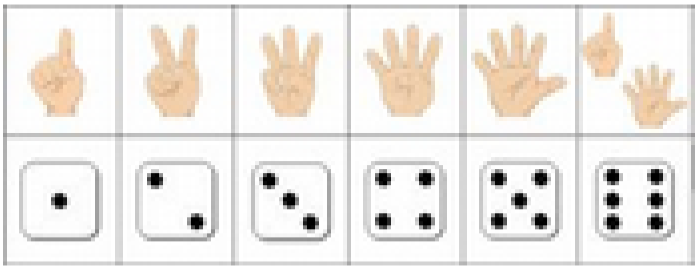
Cet enseignant entend faire travailler à ses élèves deux savoir-faire par l'entremise de cette activité :

— Savoir dénombrer une collection

— Savoir comparer deux nombres.

Pour chacun de ces savoir-faire, donner deux sources possibles d'erreurs dans cette situation.

2. L'enseignant propose ensuite à ses élèves de jouer avec les 12 cartes suivantes.



Expliquer pourquoi l'activité mathématique des élèves est modifiée du fait de l'utilisation de ce nouveau jeu de cartes.

Solution de l'exercice 25

1. On désignera les cartes suivant leur placement dans le jeu par les lettres

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L. \end{array}$$

Savoir dénombrer une collection : Les cartes D, E, F, G, H, J, L possèdent font apparaître au moins 5 items et la tâche de les dénombrer ne peut pas s'effectuer de manière instantanée. Il est dès lors nécessaire de compter, ce qui peut être compliqué par l'organisation spatiale des objets. En particulier

— Sur la carte H, la disposition circulaire (très symétrique) des carrés les rend peu discernables entre eux, ce qui fait qu'on oublie facilement où on a commencé.
— Sur la carte E, la proximité des objets relativement à leur taille fait que le compte peut être perdu en cours de route.

Les barres verticales et horizontale de la carte C peuvent ne pas être perçues comme des objets de même type (de même dans une moindre mesure, les triangles des cartes A et J). En effet, les direction verticale et horizontale sont souvent fortement plus fortement distinguées et interprétées que les directions quelconques.

Savoir comparer deux nombres : Quand la taille perçue ou l'organisation spatiale des objets dans les collections à comparer est très différente, la comparaison peut être difficile, voire faussée. Dans les situations d'apprentissage antérieures, les élèves sont entraînées à comparer des collections d'objets identiques, disposées d'une manière qui rendent la comparaison aisée (par exemple, alignés comme sur les cartes E et G).

2. Avec ce nouveau jeu de carte, l'activité de dénombrement est changée par le recours à des collection-témoin connues des élèves. On passe d'un fonctionnement de type mobilisable à un fonctionnement de type disponible. Ceci change le jeu, car la comparaison se fait entre des nombres (et plus des collections d'objets). La question de « Qui est plus grand » peut se ramener selon une procédure temporaire à « Qui vient après dans la comptine numérique ? », mais cette comparaison tend à devenir instantanée pour les petits nombres.

   Pour un troisième type d'activité, on peut envisager de mélanger les deux jeux de cartes.

Exercice 26

Sujet et corrigé rédigés exclusivement pour le groupe de renforcement maths en vue de la séance du 26 janvier et sans aucune valeur contractuelle.

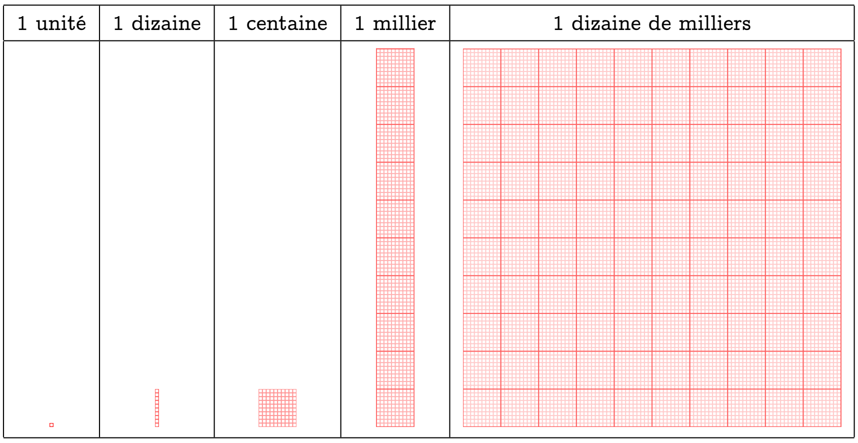
1. Une enseignante de CM2 demande à ses élèves d'écrire sous sa dictée les deux nombres suivantes en chiffres :

   Douze-millions-trois-cent-quarante-mille-cinq-cent-trente-huit
   Trois-millions-deux-mille-quarante-deux

   23 élèves sur 28 réussissent à écrire le premier nombre correctement quand 11 élèves sur 28 réussissent à écrire correctement le second.
   a) Ecrire en chiffres les deux nombres
   b) Quelle difficulté explique un tel écart de réussite ?
2. [7] Constatant les difficultés qu'éprouvent ses élèves face à de grands nombres, l'enseignante propose à sa classe une activité dont les but est de maniupler les unités de numération que les élèves découvrent au cycle 3 : dizaines de milliers, centaines de milliers et unités de millions.

   Elle distribue à chaque élève une feuille de papier millimétré ainsi que le document ci-dessous. Toutes les feuilles de papier millimétré distribuées sont identiques.

7. Activité inspirée d'une séquence proposée par Frédérick Tempier sur le site http://numerationdecimale.free.fr.



Puis elle leur demande de dénombrer les petits carreaux qui se trouvent sur la feuille de papier millimétré. Voici les réponses de 3 élèves.

Elève 1 : 5 dizaine

Elève 2 : 4 dizaine

Elève 3 : 53 milliers et 200 unité

a) *Justifier que ces trois nombres sont égaux.*
Elle met ces trois élèves en groupe. Elle leur demande de trouver le nombre total de petits carrés sur leurs trois feuilles, puis de donner ce résultat en écriture chiffrée (sans faire apparaître les unités de numération)/ Les trois élèves ne parviennent pas à se mettre d'accord et produisent donc trois réponses différentes, voici les reproductions de leurs copies.

Elève 1 : L'élève 1 a donné la réponse suivante[8].

DM	M	C	D	U
5	3	2	0	0
$\cancel{4}$ 5	$\cancel{12}$ $\cancel{13}$ 3	$\cancel{12}$ 2	0	0
	$\cancel{53}$ 5	$\cancel{0}$ $2+3=5$	0	$\cancel{200}$ 0

L'addition de

$\cancel{10}$ 11	$\cancel{11}$ 1	9 9	0	0

Il y a donc 111900 petit

Elève 2 :

$$4DM12M12C \times 3 = 12DM36M36C.$$

Donc le nombre e 12363600.

8. Pour les élèves 2 et 3, U : unités, D : dizaines, C : centaines, M : milliers, DM : dizaines de milliers.

Elève 3 : Si on additionne le

$5+4=9$ donc 9 dizaine

$3+12+53=68$, donc 68 milliers
$2+12=14$ donc 14 centaine
200 unité
Or : 68 milliers 6 dizaine 8 milliers, 14 centaine
1 millier 4 centaine 200 unité 2 centaine
Donc le nombre e 15 dizaine 9 milliers et 2 centaine 159 600.

b) *Quel élève a trouvé le bon résultat ? Proposer une autre procédure de résolution de ce problème.*
c) *Deux élèves se sont trompés. Déterminer leurs erreurs et interprétez-les.*

3. Plus tard dans l'année, l'enseignante souhaite de nouveau travailler sur un grand nombre dont le chiffre de plus grande valeur (le plus à gauche dans le nombre) est du rang des centaines de milliers. Elle propose la même activité en augmentant le nombre de feuilles de papier millimétré. *Déterminer le nombre maximal de feuilles de papier millimétré que peut utiliser l'enseignante pour ce nouveau dénombrement de petits carrés. Justifier.*

Solution de l'exercice 26

1. a) Les nombres dictés sont, en écriture chiffrée, 1 234 538 et 3 002 042.
   b) Dans 3002042, les chiffres des centaines, des dix-milliers et des cent-milliers sont le chiffre 0. Il y a une difficulté qui consiste à positionner les chiffres restants. Cette difficulté est absente dans 1234538 où tout ce qui est écrit est prononcé dans la dictée de nombres.

2. a) **Elève 1 :** 5 dizaine . En écriture chiffrée, cela fait $5\times 10\,000+3\times 1\ 000+2\times 100=53\,200$.
   Elève 2 : 4 dizaine . En écriture chiffrée, cela fait $40\,000+12\ 000+1\,200=53\,200$.
   Elève 3 : 53 milliers et 200 unité. En écriture chiffrée, cela fait $53\,000+200=53\,200$.
   b) Le résultat est $3\times 53\,200=159\,600$ petit carrés, ainsi qu'on le trouve à la calculatrice, ou bien par multiplication posée, procédure réalisable au cycle 3. Le bon résultat est donc donné par l'élève 3.
   c) L'élève 1 a dressé un tableau dans lequel les réponses sont sommées. Les 4 dix-milliers plus 12 milliers de l'élève 2 sont correctement traduits en 5 dix-milliers plus 3 milliers. En revanche, il y a une erreur de décalage lors du report de la réponse de l'élève 3 : l'élève 1 fait comme si l'élève 3 avait répondu 53 centaines plus 2 centaines (ce qui est correctement écrit 5 500 sous la forme chiffrée). L'addition finalement posée est

$$53\,200+53\,200+5\,500=111\,900,$$

   et ce calcul est correct. L'élève 2 a compris que les trois nombres sont égaux et fait un calcul de multiplication par 3. L'expression fournie sous la forme 12DM36M36C est correcte, mais il y a une erreur lors de la traduction en écriture chiffrée : les nombres 12, 36 et 36 ont simplement été ajoutés les uns à la suite des autres, suivis de deux zéro. Une organisation sous forme de tableau tel que celui de l'élève 1 aurait cependant permis de trouver le bon résultat.

3. On va supposer qu'une feuille de papier millimétré comporte 53 200 petits carreaux. Une division effectuée à la calculatrice donne que

$$18 \leqslant 999\,999 \div 53\,200 < 19.$$

Il faut au maximum 18 feuilles de papier millimétré.

Seconde résolution. D'après l'annexe 1, nous savons qu'une feuille de papier millimétré comporte (au moins) 18×25 centaines de petits carreaux, soit $450\times100 = 45\,000$ petits carreaux. Une division effectuée à la calculatrice donne que

$$22 \leqslant 999\,999 \div 45\,000 < 23.$$

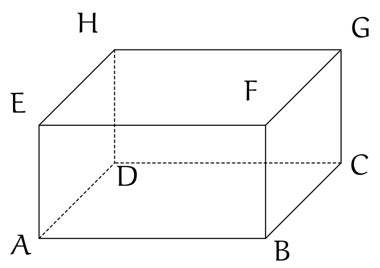
Il faut au maximum 22 feuilles de papier millimétré.

Mercredi 23 mars : Géométrie plane et dans l'e

Exercice 27 D'après un sujet de Paris

Partie I

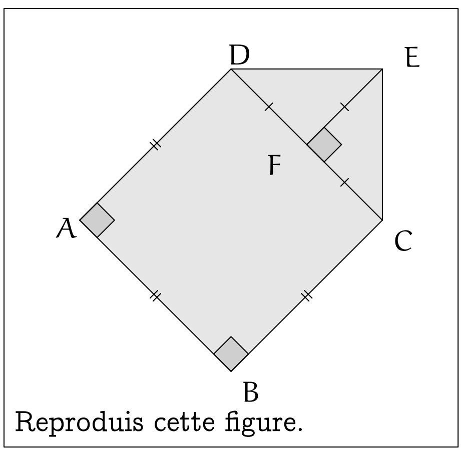
Pour chacune des affirmation suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Pour les affirmations 5 à 7, on considère le prisme droit de base carrée $ABCD$ représenté ci-dessous.



1. Un cube, une pyramide à base pentagonale et un prisme droit à base triangulaire totalisent 34 sommets.
2. Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
3. Un quadrilatère qui a deux angles droits est un trapèze rectangle.
4. On peut construire un seul triangle ABC isocèle avec AB= 3cm et BC = 7 cm.
5. $EFGH$ est un rectangle.
6. Les longueurs EH et FB sont égales.
7. E, D et B sont alignés.

Partie II

Il s'agit d'un exercice du manuel *CAP Maths CE2*; édition 2016 (Hatier), modifié avec l'ajout de codages.



1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.
2. On a tracé sur l'annexe 1 le segment [AB] en vraie grandeur. Compléter l'annexe 1 pour obtenir la figure précédente, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas. On laissera les traits de construction visibles.

3. La figure codée ci-dessus est le support d'une situation de communication de type émetteur - récepteur donnée à des élèves de cycle 3. Les élèves émettrices disposaient de la figure mais n'avaient pas à la construire.
   a) Indiquer quelle est la rupture de contrat didactique entre la géométrie étudiée en début de cycle 3 et la géométrie étudiée en fin de cycle 3.
   b) En quoi cet exercice permet-il de passer d'un contrat à l'autre ?
4. On s'intéresse à présent aux quatres production d'élèves données en annexe 3. Il avait été indiqué aux élèves qu'il n'était pas utile de respecter les longueurs, mais qu'il suffisait de respecter les propriétés géométriques. Cependant certains ont tout de même utilisé des mesures de longueurs, qui correspondent à la figure modèle dont ils disposaient.
   a) Indiquer les erreurs commises par William. Comment pourriez-vous les expliquer ?
   b) La production de Gabriel permet-elle d'obtenir la figure attendue ? Justifier.
   c) Dans une classe, comment pourrait-on montrer à Neila que son programme ne convient pas ?
   d) Construire une figure qui correspond à l'énoncé produit par Raphaëlle mais qui ne répond pas au problème posé.

Texte de William : *Fais un lo* ABCD *et place le point* F *au milieu de* [DC]. *Trace un triangle équilatéral rectangle* DFE *et un autre de l'autre côté, un triangle* CEF.

Texte de Neila : (1) *Trace un carré et nomme le* ABCD.

(2) *Place un point* F *milieu de* [DC].

(3) *Trace le segment* [DE].

(4) *Trace le segment* [CE].

(5) *Trace le segment* [FE].

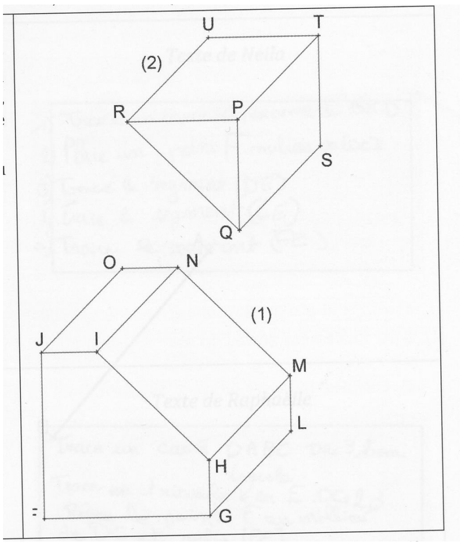
Texte de Gabriel : *Trace un carré* ABCD. *Trace un triangle rectangle isocèle en* E, DEC. *Place un point* F *au milieu du segment* [DC]. *Trace un segment* [FE].

Texte de Raphaëlle : *Trace un carré* DABC, DA = 3,2 cm. *Trace un triangle iscocèle en* E. DE = 2,3 cm. *Place le point* F *au milieu de* DC *et relie* [FE].

Partie III

On trouve l'énoncé suivant dans le manuel *Cap Maths* CM2, édition 2004 (Hatier).

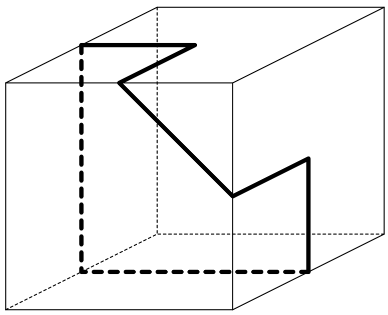
En assemblant le cube tronqué (1, en bas) et le prisme droit (2) représentés ci-contre, on obtient un cube.
Tu disposes d'un gabarit des différentes faces du prisme droit PQRSTU (2), à savoir les pièces (a), (d) et (e) ainsi que du gabarit d'une face du cube (pièce (c) dans la suite).
Utilise ces gabarits pour construire le patron du cube tronqué.



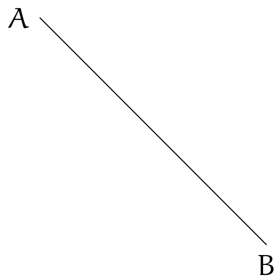
Volontairement, ni les gabarits des faces du prisme droit, présents dans la ressource, n'ont été reproduits dans cet énoncé.

1. On sait que l'arête du cube a pour longueur 6 cm et que $JI = HG = 2\,\text{cm}$. Construire en vraie grandeur les pièces (a), (d) et (e). On ne demande pas de justification.
2. a) Par quel nom autre que « cube tronqué » peut-on désigner le solide (1) ?
   b) Indiquer son nombre de faces, d'arêtes et de sommets.
   c) Construire en vraie grandeur un patron de ce solide ; tous les instruments sont autorisés.
   d) Des élèves doivent commander à l'enseignante un nombre de morceaux de scotch pour construire le solide à partir de leur patron, avec un seul morceau de scotch pour solidariser deux faces. Pour le patron construit en (c), combien de morceaux de scotch devraient-ils commander ?
3. On considère le cube ci-dessous sur lequel on a tracé des segments sur plusieurs faces.

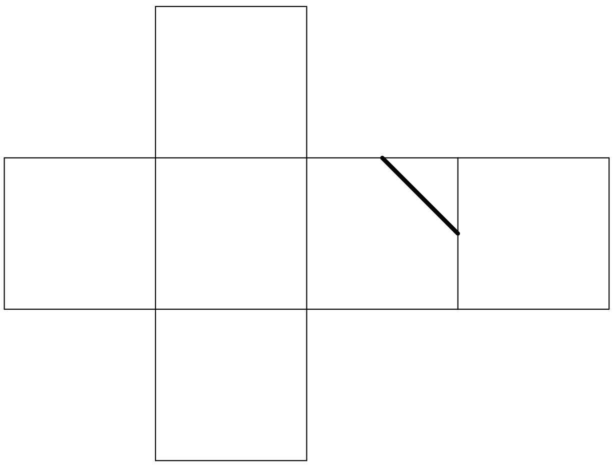
   Compléter le patron correspondant à ce solide décoré, sur l'annexe 2, en y ajoutant les segments tracés sur le cube manquant. Pas de justification attendue, tous les instruments autorisés.



Annexe 1



Annexe 2



* Exercice 28 Géométrie dans l'espace (*Concours blanc Aix-Marseille 2009*)

Partie I

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et dont la base $ABCD$ est un carré dont les côtés ont pour longueur 6 cm. Les faces SAD et SAB sont des triangles rectangles isocèles en A. I est le milieu du segment $[SA]$.

1. Quelle est la nature du triangle SAC ? Justifier.
2. Classer chacune des arêtes de cette pyramide selon leur longueur. On ne demande pas de justification. Indiquer la longueur correspondant à chacune de ces classes.
3. Montrer que les triangles SDC et SBC sont rectangles.
4. Représenter à main levée la pyramide $SABCD$ en perspective cavalière en plaçant la face SAD dans le plan frontal.

5. Construire le patron de la pyramide $SABCD$ à l'échelle 1/2, patron pour lequel les faces triangulaires ont toutes un côté commun avec la base carréee $ABCD$ de la pyramide.
* 6. On veut construire sur la pyramide $SABCD$ le plus court chemin allant de I à C et traversant l'arête [AD]. On appelle M le point où ce chemin coupe l'arête [AD]. Calculer la longueur AM.

Partie II

Les documents pédagogiques reproduits dans les annexes 1,2 et 3 sont extraits du manuel ERMEL « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes ».

1. Pour chacune des activités, dire dans quel cycle elle se situe. Donner deux arguments pour justifier la réponse.
2. Pour les annexes 1 et 2 :
   a) Relativement aux objectifs décrits, donner 2 arguments en faveur du choix des solides proposés dans cette situation.
   b) Préciser la principale compétence en jeu dans cette activité.
3. Pour l'annexe 3 :
   a) Quelles sont les tâches de l'élève lors de l'étape 1 ?
   b) Pour cette même étape et pour chacun des assemblages débouchant sur la réponse NON, donner un argument permettant de justifier cette réponse.
   c) A l'issue de la mise en commun que peut faire l'enseignante pour arbitrer les positions des différents groupes et convaincre toutes les élèves de la classe du bien-fondé des réponses OUI ou des réponses NON correspondant à chaque assemblage ?

Exercices élaborés à partir des concours blancs proposés dans les IUFM
Exercice 8 avec QC - Corrigé COPIRELEM page 167

ANNEXE 1

« Deviner le solide »

> Description rapide

Il s'agit pour les élèves de retrouver, parmi un lot de solides, et grâce à des questions fermées (auxquelles on ne peut répondre que par « oui » ou par « non »), le solide caché par un groupe d'élèves ou par l'enseignant.

> Objectifs

Amener les élèves à décrire les solides par leurs propriétés géométriques telles que nombre de faces, d'arêtes, de sommets, nature des faces, et non plus par leurs propriétés qualitatives telles que la couleur, la forme générale ou encore par comparaison avec des objets de la vie courante. Cette situation permettra de préciser et de donner du sens au vocabulaire spécifique aux polyèdres (faces, arêtes, sommets, etc.), mais également à certaines figures planes.

> Durée

Deux séances de 55 minutes et une séance de 30 minutes pour les activités d'accompagnement.

...

> Procédures rencontrées et visées

La première difficulté à laquelle vont se confronter les élèves est la formulation de questions fermées non ambiguës.

Exemples de questions auxquelles les élèves peuvent penser :

- des propriétés qualitatives définissant la forme comme dans: « Est-il en forme de pointe de crayon ? », ou bien : « Est-il de la forme d'une tente ? » ;
- des termes sociaux et non géométriques comme « Y a-t-il six pointes ? », ou bien « Les murs sont-ils des carrés ? » ;
- des ambiguïtés confondant le 2D et le 3D comme dans « Est-il de la forme d'un losange ? » (alors qu'il s'agit d'un double-tétraèdre).

...

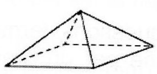
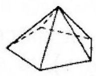
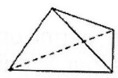
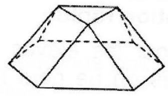
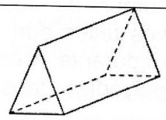
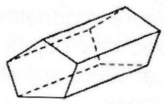
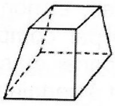
(dans le passage non reproduit ci-dessus, les auteurs de l'activité précisent les objectifs qu'ils y assignent)

> Matériel

Un lot de solides (comme ceux qui sont représentés ci-dessous) et un lot supplémentaire pour extraire le solide à faire deviner par groupe de quatre…

ANNEXE 2

Les pyramides sont de même hauteur.

			
Pyramide à base rectangulaire et 4 triangles équilatéraux	Pyramide à base pentagonale non régulière	Pyramide à base triangle équilatéral et 3 triangles isocèles	Un solide complexe: base hexagonale régulière + 3 carrés
			
Prisme droit à base triangle isocèle	Prisme droit à base pentagonale régulière	Tronc de pyramide : 2 carrés et 4 trapèzes	

Dans un grand tableau affiché seront récapitulées les questions posées et les réponses apportées, chaque groupe dispose d'une feuille similaire sur laquelle il peut préparer ses questions (il faut donc au moins une feuille par groupe et par phase).

	Questions	Réponses (« oui », « non », « pas de réponse »)
1		
2		
…		

> Déroulement

Les élèves sont par groupes de quatre. Ils ont un lot de solides et posent les questions.
Deux élèves ont le solide à trouver dans une boite à l'abri des regards des autres élèves. Ils sont devant le tableau, par exemple, et répondent aux questions.

ANNEXE 3

6. Patron de solides

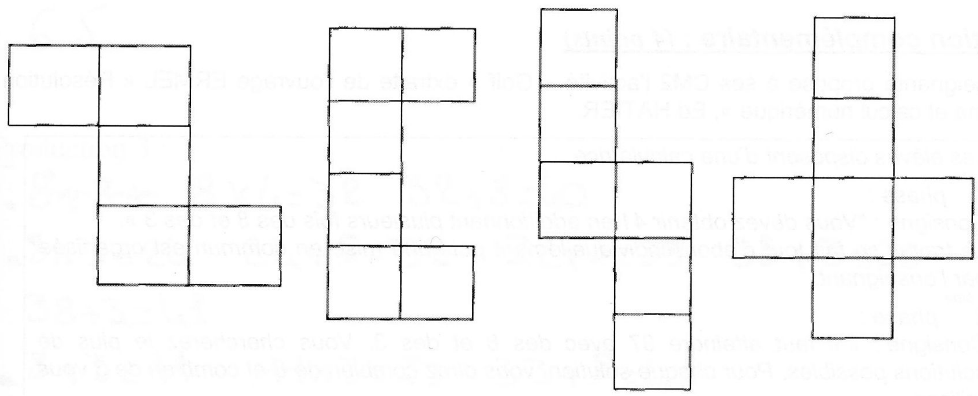
(...)

Étape 1 :

Consigne :

« Vous avez sur votre feuille des assemblages de carrés. Vous devez indiquer si ce sont des patrons du cube, c'est-à-dire si en pliant et en collant les faces on obtient un cube. Vous devez écrire vos arguments en dessous de chacun des assemblages. Nous mettrons ensuite en commun au tableau. Vous n'avez pas le droit de les découper. »

Les élèves travaillent par deux sur un agrandissement A3 de la fiche 1.



OUI-NON OUI-NON OUI-NON OUI-NON

Fiche 1 – Peut-on réaliser un cube ?

Étape 2 :

Mise en commun

(...)

Étape 3 :

Trouver le plus de patrons de cube différents

(...)

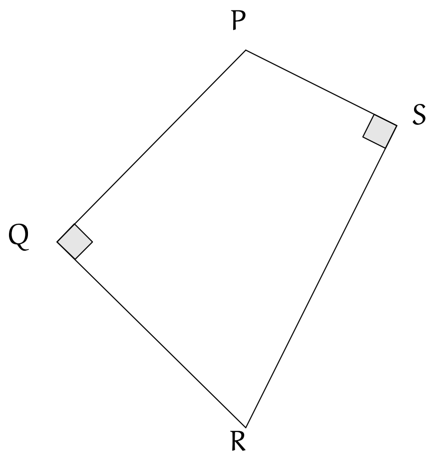
Solution de l'exercice 27

Partie I

1. Non.

Solide	Nombre de sommets
Cube	8
Pyramide à base pentagonale	6
Prisme droit à base triangulaire	6
Total	**20**

2. Non. Tous les cerf-volants ont leurs diagonales perpendiculaires, mais tous les cerf-volants ne sont pas des losanges. (Il y a aussi des quadrilatères qui ne sont pas des cerfs-volants et qui ont malgré tout leurs diagonales perpendiculaires, voir Exercice 9.) En revanche, les *parallélogrammes* qui ont leurs diagonales perpendiculaires sont des losanges.
3. Non. Le quadrilatère PQRS ci-dessous a deux angles droits, pourtant ce n'est pas un trapèze rectangle.



On peut toutefois montrer que si un quadrilatère a deux angles droits, alors soit c'est un trapèze rectangle, soit il est inscriptible dans un cercle. Ces deux cas ne s'excluent pas, le quadrilatère en question peut être un rectangle.
4. A priori, il y a deux valeurs possibles pour la longueur AC : 3cm ou 7cm. Cependant, d'après l'inégalité triangulaire,

$$BA + AC \geqslant BC,$$

et $3 + 3 < 7$. Donc $[AC]$ a pour longueur 7 cm. Le triangle ABC est uniquement déterminé (à superposabilité près) par les longueurs de ses trois côtés d'après le premier cas d'égalité des triangles. On peut le tracer à l'aide d'une règle graduée et d'un compas.
5. Oui. $EFGH$ est un carré, donc c'est un rectangle.
6. A priori non, sauf si $ABCDEFGH$ est un cube, ce qui n'est pas dit dans l'énoncé.
7. Non. B et D sont dans le plan (ABC) qui est le plan de la base du solide. Si E, D et B étaient alignés, E serait aussi dans ce plan. Mais E n'appartient pas au plan (ABC).

Partie II

1. Déjà, les côtés $[AD]$ et $[BC]$ de $ABCD$ sont de même longueur. Ils sont aussi parallèle, car tous les deux perpendiculaires à la droite (AB). Donc d'après l'Exercice 7, $ABCD$ est un parallélogramme. Ensuite, on a vu à l'Exercice 11 qu'un parallélogramme ayant deux côtés adjacents de même longueur et un angle droit est un carré. Conclusion, $ABCD$ est un carré.
2. A faire vous.
3. a) On va de la géométrie perçue vers la géométrie instrumentée.
   b) La figure contient des codages, ce qui indique qu'on ne se situe pas en géométrie perçue. Les élèves sont amenées à utiliser leur équerre, par exemple.

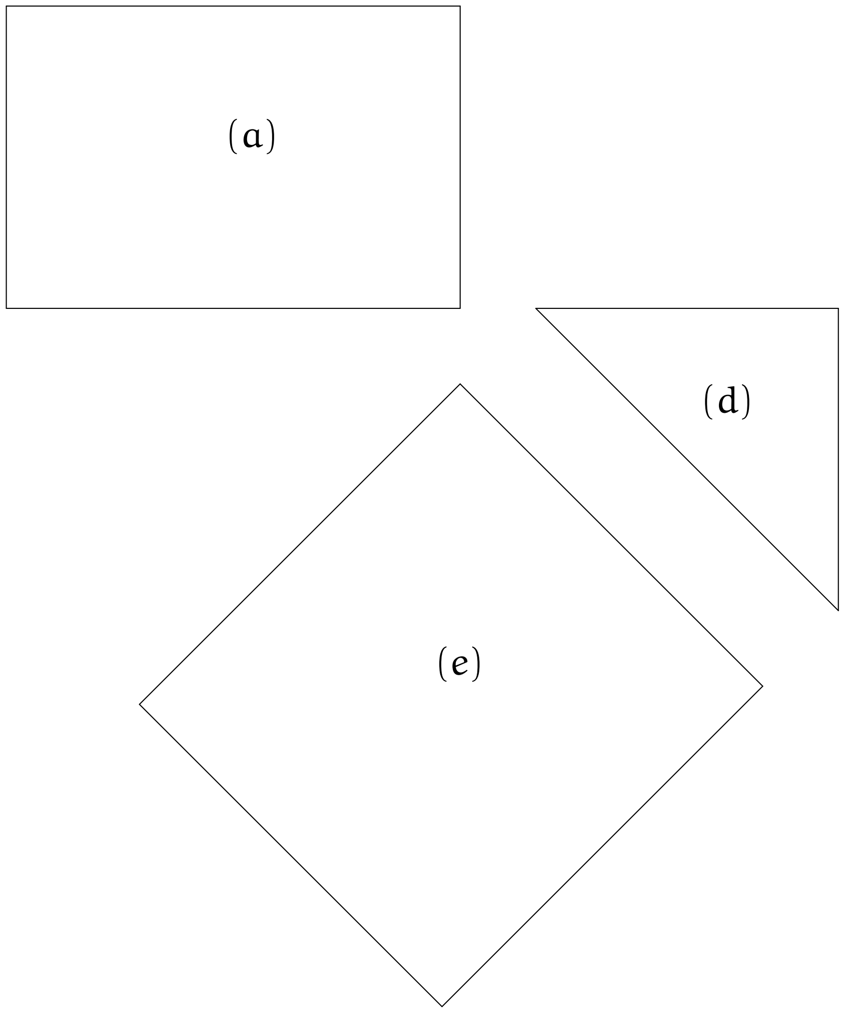
Partie III

1. La pièce (a) correspond au rectangle $RPTU$, ou encore au rectangle $TPQS$. C'est un rectangle de côtés 6 cm et 4 cm.

   La pièce (b) correspond au triangle RPQ, ou encore au triangle TUS. C'est un triangle rectangle dont les deux côtés adjactents à l'angle droit ont pour longueur 4 cm.

   D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse de ce triangle a pour longueur $4\sqrt{2}$ cm, soit $5,7$ cm environ.

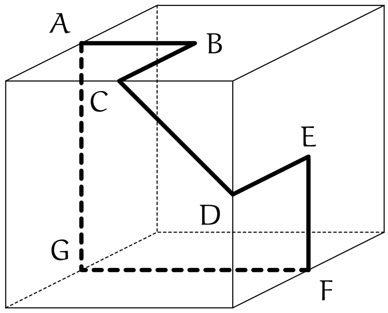
   (Notre ordre pour les pièces (a), (d) et (e) est quelque peu arbitraire.)

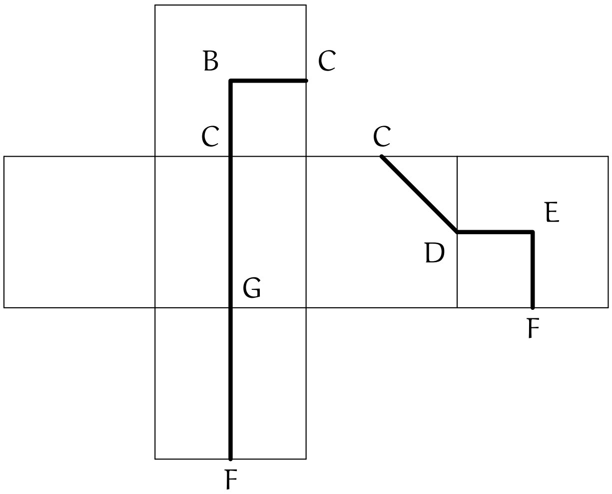
   Attention, contrairement aux apparences (e) n'est pas un carré !

2. a) Le solide (1) peut aussi être appelé prisme droit à base pentagonale. (Un pentagone est $FGHIJ$.)
   b) On dénombre 7 faces, 15 arêtes et 10 sommets.
   c) Voir sur la page 53.
   d) On a vu qu'il y avait 15 arêtes au total. Pour le patron construit en (c), on peut de plus compter les arêtes qui correspondront à des plis du papier quand le patron sera replié. Il y en a 6 sur notre patron. Il faut donc 9 morceaux de scotch.

3. Pour plus de clarté, nommons les sommets de la ligne brisée :



Voici la ligne demandée dessinée sur le patron du cube.



La question 2.d de l'Exercice 27 amène une question naturelle : le nombre de morceaux de scotch (ou de languettes) nécessaires pour coller toutes les arêtes restantes dépend-il du patron ? La réponse est **non** *(en tout cas pour les polyèdres convexes). Derrière chaque patron se cache une paire d'objets appelés* arbres couvrants, *dont le nombre de noeuds ne dépend pas du patron. Ainsi, un patron du cubre aura toujours 5 plis « internes » et un périmètre de* 14 *fois la longueur du côté d'une face. Les côtés du patron se recollent en 7 paires pour former 7 arêtes,* $5+7=12$ *comme il se doit.*

Solution de l'exercice 28

Partie I

1. Le triangle SAD est rectangle en A, donc (SA) est perpendiculaire à (AD).
   Le triangle SAB est rectangle en A, donc (SA) est perpendiculaire à (AB).
   De ces deux faits nous déduisons que (SA) est perpendiculaire au plan (ABC).
   L'angle $\widehat{SAC}$ est donc droit, et le triangle SAC est rectangle en A.
   (Attention, ce triangle n'est pas une face de la pyramide $SABCD$.)
2. Voici un classement des arêtes par longueur croissante.

$$AB = BC = CD = DA = SA < SB = SD < SC.$$

D'après l'énoncé, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[SA]$ ont pour longueur 6cm. D'après le théorème de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles isocèles SAD et SAB,

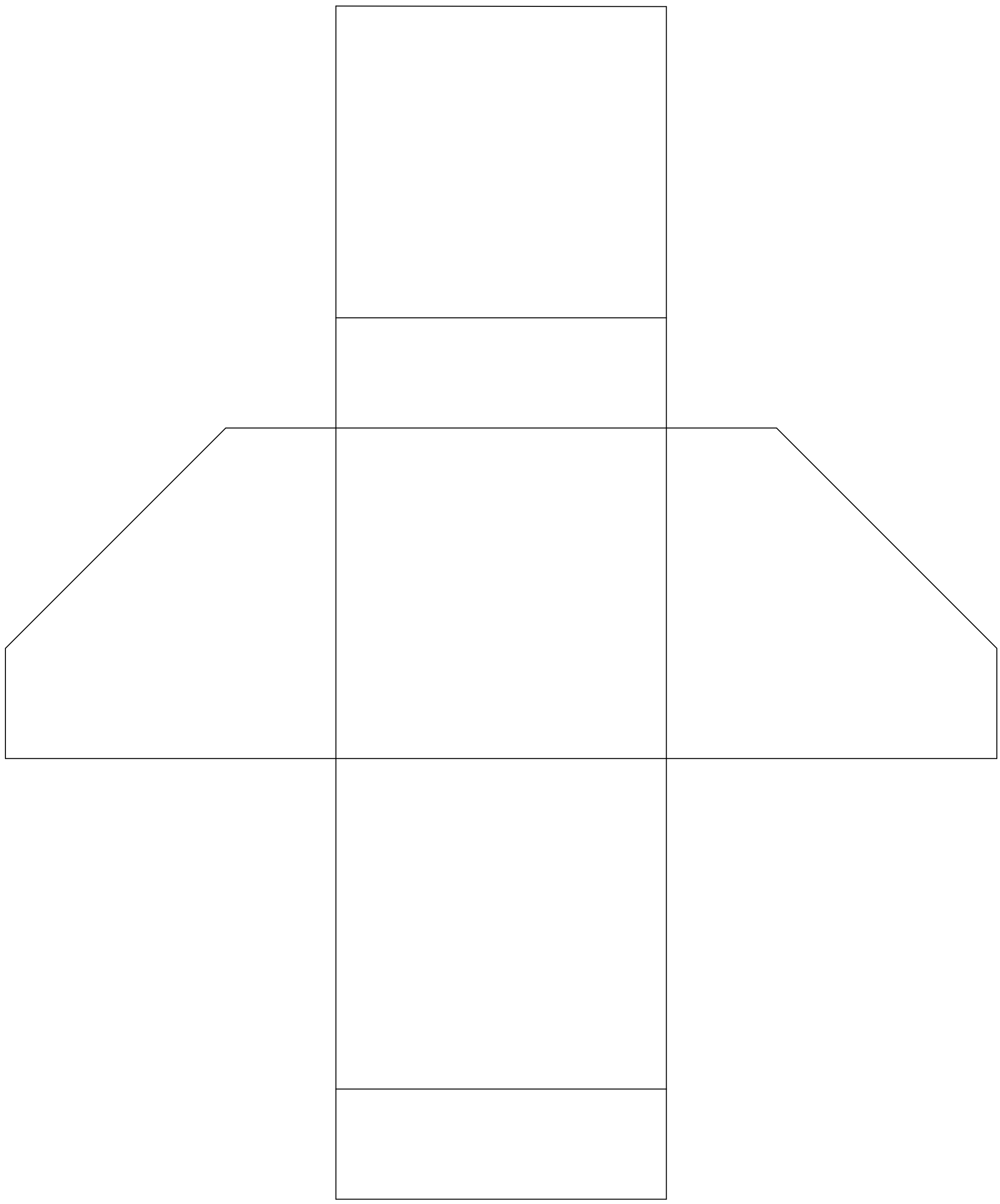
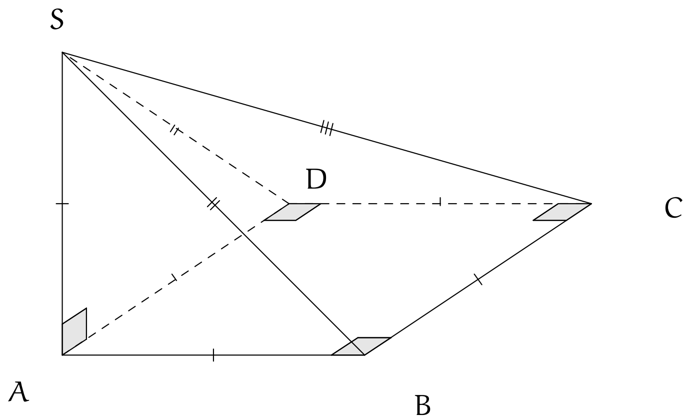


FIGURE 4. Patron demandé à la question 2.c de l'Exercice 27. Attention : pour tenir dans la page, la figure est réalisée à l'échelle de 80%, ce qui signifie qu'un segment de longueur réelle 10 cm est représenté par un segment de 8 cm.

[SD] et [SB] ont pour longueur $6\sqrt{2}$ cm, soit environ $8,5$ cm. D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle SAC, [SC] a pour longueur $6\sqrt{3}$ cm, soit environ $10,4$ cm.



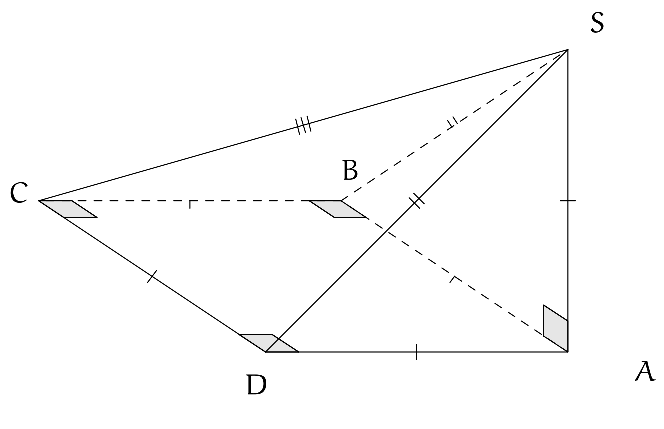
3. On a montré à la question 1 que (SA) est perpendiculaire au plan (ABC). Le plan (SAD) est donc perpendiculaire au plan (ABC), en particulier à la droite (CD). Donc la droite (SD), qui est dans le plan (SAD), est perpendiculaire à la droite (CD) : l'angle $\widehat{SDC}$ est droit.

   Il est également possible de procéder à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore : d'après la question 2,

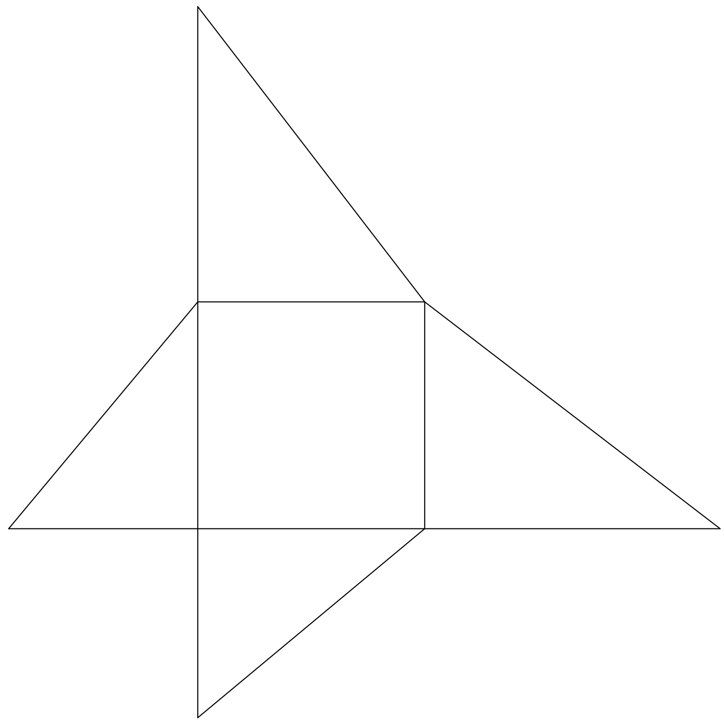
$$SC^2 = SD^2 + DC^2$$

   donc le triangle SDC est rectangle en D.

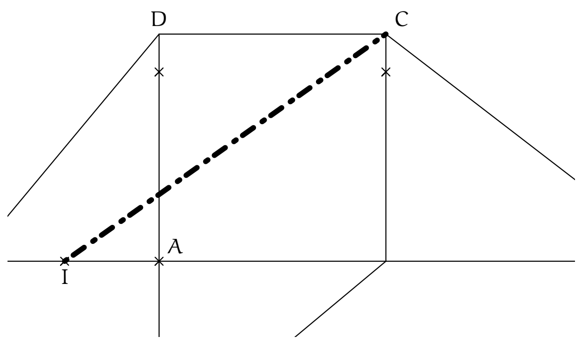
   On montre exactement de la même manière que le triangle SBC est rectangle (on peut aussi remarquer que la pyramide a (SAC) pour plan de symétrie, et que la symétrie correspondante envoie SDC sur SBC.)
4. Voici la représentation de $SABCD$ demandée.



5. Voici une représentation du patron à l'échelle 1/2.



6. On peut situer I et C sur le patron, ainsi que le plus court chemin de I à C traversant [AD] :



D'après le théorème de Thalès, $AM = 2$ cm.