ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROGRAMMES DU SECONDAIRE

GABRIEL PALLIER

On recense ci-dessous les contenus et compétences attendues liés à [1] l'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire. On entend « algèbre linéaire » au sens large, incluant les propriétés affines et projectives ainsi que l'algèbre bilinéaire et donc les produits scalaires (mais pas les angles et distances sans produit scalaire). On inclue certains outils d'analyse et de probabilités du lycée qui permettent de tirer parti de la linéarité.

1. Attendus de fin de cycle 3

D'après le Bulletin officiel spécial numéro 11 du 26-11-2015, complété par le Bulletin officiel numéro 30 du 26-7-2018 (Cycle 3, Volet 3).

1.1. **Nombres et calculs.**

Attendus en fin de cycle.
- Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité. Appliquer un pourcentage.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève. Utilisation d'exemples de tableaux de proportionnalité.

1.2. **Grandeurs et mesures.**

Attendus en fin de cycle.
- Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation.
- Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève. Comparer distance parcourue et temps écoulé, quantité d'essence consommée et distance parcourue, quantité de liquide écoulée et temps écoulé, etc.

1.3. **Espace et géométrie.**

« Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec les deux autres thèmes : résoudre dans un autre cadre des problèmes relevant de la proportionnalité ; utiliser en situation les grandeurs (géométriques) et leur mesure ».

Attendus en fin de cycle.
- Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques (notions d'alignement, d'appartenance, de perpendicularité, de parallélisme, d'égalité de longueurs, d'égalité d'angle, de distance entre deux points, de symétrie, d'agrandissement et de réduction).

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève. (Extraits)
- Situations donnant lieu à des repérages dans l'espace ou à la description, au codage ou au décodage de déplacements [...].
- Reproduire une figure à partir d'un modèle (l'échelle pouvant être donnée par des éléments déjà tracés).

1. Bien entendu, cette « liaison » s'opère pour une grande partie a posteriori. En particulier dans l'esprit des programmes actuels la première rencontre avec les vecteurs et les produits scalaires s'appuie au moins en partie sur les connaissances de géométrie déductive du collège et le plan n'est pas un objet repéré a priori. (Voir cependant l'introduction de la section 3 à ce sujet.)

2. Cycle 4

Thème A. **Nombres et calculs.** [Les élèves] commencent à résoudre, de façon exacte ou approchée, des problèmes du 1er degré à une inconnue, et apprennent à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation ou d'une inéquation. En 3e, ils résolvent algébrique- ment équations et inéquations du 1er degré, et mobilisent le calcul littéral pour démontrer. Ils font le lien entre forme algébrique et représentation graphique.

Connaissances et compétences associées.
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
- Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.
- Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré.
- Notions de variable, d'inconnue.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève. (Extraits)
- Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables).

Thème B. **Organisation et gestion de données, fonctions.** [Les élèves] apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. [...]

Les activités autour de la proportionnalité prolongent celles du cycle 3. Au fur et à mesure de l'avancement du cycle, les élèves diversifient les points de vue en utilisant les représentations graphiques et le calcul littéral. En 3e, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème.

Connaissances et compétences associées.

(1) Résoudre des problèmes de proportionnalité
  - Reconnaitre une situation de proportionnalité ou non.
  - Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle. Résoudre des problèmes de pourcentage.
  - Coefficient de proportionnalité.

(2) Comprendre et utiliser la notion de fonction (Extrait)
  - Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève.

(1) Résoudre des problèmes de proportionnalité
  - Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par :
    > des formules (par exemple la longueur d'un cercle ou l'aire d'un disque comme fonction du rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension comme fonction de l'intensité).
    > des représentations graphiques (par exemple des nuages de points ou des courbes).
    > un tableau (dont des lignes ou des colonnes peuvent être proportionnelles ou non).
    - Compléter un tableau de proportionnalité en utilisant, par exemple, le produit en croix.

(2) Comprendre et utiliser la notion de fonction (Extraits)
  - Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.
  - Faire le lien entre fonction linéaire et proportionalité.

Thème C. **Grandeurs et mesures.** L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3e, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès. [...] Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

Connaissances et compétences associées. (Extraits)
— Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.
— Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales.
— Théorème de Thalès et réciproque.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève.
— Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie.
— Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.
— Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.
— Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré.
— Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

3. Seconde générale et technologique

3.1. **Géométrie : Manipuler les vecteurs du plan.** « Au cycle 4, la notion de translation [a] fait l'objet d'une première approche, fondée sur l'observation de son effet sur les configurations planes et de manipulations diverses, notamment sur un quadrillage ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On s'y appuie en seconde pour introduire la notion de vecteur. Le professeur peut définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

est mise en évidence. La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique ».

Contenus.
— Vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ associé à la translation qui transforme M en M′. Direction, sens et norme.
— Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
— Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
— Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
— Expression des coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en fonction de celles de A et de B.
— Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
— Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

Capacités attendues.
— Représenter géométriquement des vecteurs.
— Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
— Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.

— Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
— Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
— Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
— Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Démonstration.
— Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Approfondissement possible.
— Définition vectorielle des homothéties.

3.2. **Géométrie : Représenter et caractériser les droites du plan.** « Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite ». Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Contenus.
— Vecteur directeur d'une droite.
— Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
— Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues.
— Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
— Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
— Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
— Etablir que trois points sont alignés ou non.
— Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
— Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration.
— En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite. Exemples d'algorithme
— Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
— Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissement possibles.
— Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
— Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

3.3. **Statistiques et probabilités.**

Contenus. (Extrait)
— Linéarité de la moyenne.

4. Seconde STHR

4.1. **Fonctions : Fonctions de référence.**

Connaissances.
— Fonctions linéaires et fonctions affines.

Capacités attendues.
— Le lien est établi entre le signe de $ax+b$ [*sic*], le sens de variation de la fonction $x \mapsto ax+b$ et la représentation graphique de cette fonction.
— La démonstration qu'une fonction donnée n'est pas linéaire ou affine est l'occasion de pratiquer un raisonnement par contre-exemple.

4.2. **Géométrie : Repérage dans le plan.**

Connaissances.
— Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
— Milieu d'un segment.

Capacités attendues.
— Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.
— Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

4.3. **Géométrie : Configurations du plan.**

Capacités attendues.
— Utiliser les théorèmes de Thalès ou de Pythagore pour calculer des longueurs ou démontrer des propriétés géométriques (orthogonalité, parallélisme).

4.4. **Géométrie : Droites du plan.**

Connaissances.
— La droite comme représentation graphique d'une fonction affine.
— Équations cartésiennes d'une droite ; équation réduite.
— Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
— Droites parallèles, droites sécantes.
— Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Capacités attendues.
— Interpréter graphiquement la pente d'une droite.
— Établir que trois points sont alignés, non alignés.
— Déterminer une équation de droite à partir de deux de ses points.
— Tracer une droite donnée par une équation cartésienne, réduite ou non.
— Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
— Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Interpréter géométriquement.

Commentaires.
— On démontre que toute droite [du plan repéré] a une équation de la forme $y = mx + p$ ou $x = c$.

5. Première technologique

5.1. **Géométrie dans l'espace (STD2A uniquement).**

Contenus.
— Repérage : oordonnées d'un point dans un repère orthonormal de l'espace.
— Distance entre deux points.
— Perspective cavalière : Projection sur un plan parallèlement à une droite ;
— Propriétés conservées (milieux, contacts, rapports de longueurs) et non conservées (longueurs, angles) par une projection parallèle.

Capacités attendues. (Extraits)
- Utiliser la représentation en perspective cavalière d'un quadrillage ou d'un cube pour représenter d'autres objets.
- Représenter en perspective ou en vraie grandeur des sections planes.

5.2. **Automatismes : capacités attendues.** (Extraits)
- Tracer une droite [du plan rapporté à un repère] donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur.
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.
- Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points.

6. Terminale technologique

6.1. **Géométrie plane (STD2A uniquement).**

Capacités attendues. (Extraits)
- Par analogie avec la notion de tangente étudiée en classe de première (tangente à la courbe représentative d'une fonction), la tangente à une conique [du plan] en un point est définie comme position limite des sécantes en ce point.
- Aucune connaissance n'est attendue sur les équations cartésiennes de tangentes à une conique. Dans les situations analytiques de raccordement, celles-ci sont données.

7. Première générale

7.1. **Analyse : Dérivation.**

Contenu. (Extrait)
- Point de vue local : tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme “limite des sécantes” [Non formalisée]. Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Point de vue global : opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit [...], fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.

Capacités attendues. (Extraits)
- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables [la linéarité notamment].

7.2. **Géométrie : Calcul vectoriel et produit scalaire.**

Contenu.
- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}}$.

Capacités attendues.
- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Démonstrations.
- Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ (démonstration avec le produit scalaire).

Approfondissements possibles.
- Loi des sinus.
- Droite d'Euler d'un triangle.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

7.3. **Géométrie repérée.** Dans cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Contenus. (Extrait)
- Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur.

Capacités attendues. (Extrait)
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.

8. Terminale générale

« Il importe que l'élève se dote de représentations mentales solides susceptibles d'être réinvesties lors de la poursuite d'études : un vecteur non nul engendre une direction de droites, deux vecteurs non colinéaires engendrent une direction de plan, trois vecteurs non coplanaires engendrent les vecteurs de l'espace ; si une droite et un plan sont sécants, un vecteur directeur de cette droite et deux vecteurs non colinéaires de la direction de ce plan forment une base de l'espace. La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire. L'étude générale des systèmes linéaires n'est pas un objectif du programme mais des exemples seront traités dans le contexte de la géométrie repérée : décomposition de vecteurs, intersections de plans, etc »

8.1. **Algèbre et géométrie : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace.** « Cette section introduit d'emblée le calcul vectoriel dans l'espace, avec les notions qui l'accompagnent : translations, combinaisons linéaires de vecteurs, indépendance linéaire, directions de droites et de plans. Il s'agit de s'appuyer sur la perception de l'espace pour mettre en place une géométrie reliée au calcul vectoriel et adaptée aux besoins des autres disciplines. Les figures formées à partir des solides usuels (cube, pavé, tétraèdre) rencontrés au collège sont des supports privilégiés pour manipuler les notions vectorielles et appréhender la position relative de droites et de plans. Il est important de développer les représentations des objets géométriques, notamment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, afin de permettre à l'élève d'exercer son regard et de développer sa vision dans l'espace ».

Contenus.

— Vecteurs de l'espace. Translations.
— Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
— Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
— Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
— Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
— aractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
— Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités attendues.

— Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
— Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
— Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
— Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
— Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
— Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité)

Approfondissements possibles.

— Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points.
— Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
— Fonction vectorielle de Leibniz.

8.2. **Géométrie : Représentations paramétriques et équations cartésiennes.** « L'objectif de cette section est de montrer comment la donnée d'un repère, qu'on supposera orthonormé, permet d'établir un lien entre la géométrie de l'espace et les calculs algébriques dans $\mathbf{R}^3$. L'objectif majeur est une bonne maîtrise des représentations paramétriques de droites et des équations de plans. »

Contenus.

— Représentation paramétrique d'une droite.
— Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues.

— Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
— Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
— Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
— Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

Démonstration.

— Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point A.

Approfondissements possibles.
- Déterminer l'intersection de deux plans.
- Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
- Intersection d'une sphère et d'une droite.

8.3. **Analyse : Suites.**

Approfondissements possibles. (Extrait)
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

8.4. **Analyse : Primitives, équations différentielles.** « Le dernier volet du programme d'analyse porte sur les équations différentielles et le calcul intégral. On introduit d'abord la notion de primitive d'une fonction continue f, que l'on présente comme "problème inverse " de celui de la dérivation ou, de façon équivalente, comme résolution de l'équation différentielle $y' = f$. On étudie ensuite les équations différentielles linéaires de la forme $y' = ay + b$, d'importance fondamentale pour des questions de modélisation ».

Contenus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes.
- Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$, $a \neq 0$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstration.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

8.5. **Analyse : Calcul intégral.**

Contenus. (Extraits)
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.

8.6. **Probabilités : sommes de variables aléatoires.** « L'objectif est de rendre l'élève capable d'utiliser la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires quelconque et l'additivité de la variance pour des variables indépendantes dans diverses situations. Il s'agit de développer l'intuition probabiliste, les compétences de calcul et de raisonnement sur les variables aléatoires. La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues. Le professeur peut choisir de l'admettre, ou de la justifier sur un exemple. Les variables indépendantes considérées dans le programme sont toujours envisagées dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. L'hypothèse d'indépendance étant constitutive du modèle considéré, toute question visant à justifier l'indépendance de variables aléatoires données a priori est en dehors des objectifs du programme. L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes est admise. La relation $\mathbf{E}(\mathrm{XY}) = \mathbf{E}(\mathrm{X})\mathbf{E}(\mathrm{Y})$ pour des variables indépendantes n'est pas un attendu du programme ».

Contenus.
— Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $\mathbf{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}) + \mathbf{E}(\mathrm{Y})$ et $\mathbf{E}(a\mathrm{X}) = a\mathbf{E}(\mathrm{X})$.
— Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $\mathbf{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathbf{V}(\mathrm{X})+\mathbf{V}(\mathrm{Y})$. Relation $\mathbf{V}(a\mathrm{X}) = a^2\mathbf{V}(\mathrm{X})$.
— Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
— Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + ... + \mathrm{X}_n$ et de la moyenne $\mathrm{M}_n = \mathrm{S}_n/n$.

Capacités attendues.
— Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
— Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
— Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstrations.
— Espérance et variance de la loi binomiale.

Approfondissement possible.
— Relation $\mathbf{E}(\mathrm{XY}) = \mathbf{E}(\mathrm{X})\mathbf{E}(\mathrm{Y})$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y. Application à la variance de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

9. Terminale générale, option mathématiques complémentaire

9.1. **Modèles d'évolution.**

Contenus associés. (Extraits)
— Suites récurrentes.
— Suites arithmético-géométriques. Équation différentielle $y' = ay + b$.

9.2. **Analyse.** (Extrait)
— Faire une première approche des équations différentielles, avec la notion de primitive et la résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

10. Terminale générale, option mathématiques expertes

10.1. **Nombres complexes : point de vue algébrique, point de vue géométrique.**

Contenus. (Extraits)
— Ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations
— Conjugaison. Propriétés algébriques.

Problèmes possibles. (Extraits)
— Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$.
— Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.

10.2. **Nombres complexes et trigonométrie.**

Contenus. (Extraits)
— Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.
— Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

Démonstrations.
— Démonstration d'une des formules d'addition.

10.3. **Graphes et matrices.** « Prenant appui sur la résolution de problème et la modélisation, cette partie a pour objectif d'introduire les notions de graphes et de matrices en soulignant l'intérêt de les appliquer à d'autres disciplines, notamment les sciences économiques et sociales, les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, l'informatique etc. Les matrices sont étudiées sous divers points de vue : modélisation de problèmes issus des autres disciplines, systèmes linéaires, transformations géométriques. Il s'agit de mettre en valeur l'efficacité du calcul matriciel pour représenter et résoudre des problèmes. La notion de graphe est fondamentale pour les mathématiques discrètes et a des applications dans de nombreux domaines. Le programme la fait interagir avec les matrices. Une illustration exemplaire dans le domaine des probabilités, les chaînes de Markov, fait l'objet d'un développement spécifique ».

Contenus. (Extraits)
- Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée.
- Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes.
- Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3.
- Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{C}$.
- Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.
- Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne Π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé.
- Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i,j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\Pi_0\mathrm{P}^n$.
- Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.

Capacités attendues. (Extraits)
- Modéliser une situation par une matrice.
- Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire, calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).
- Expression du nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance n-ième de la matrice d'adjacence.
- Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après n transitions.

Problèmes possibles.
- Interpolation polynomiale.
- Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique.
- Modèle de diffusion d'Ehrenfest.
- Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.
- Algorithme PageRank.