Géométrie hyperbolique à grande échelle

Gabriel Pallier

Université Paris-Sud

15 mai 2018

Le modèle du disque : l'infini dans une coquille de noix

M.C. Escher,
Circle Limit I (1958).

Le modèle du disque : l'infini dans une coquille de noix

M.C. Escher,
Circle Limit I (1958).

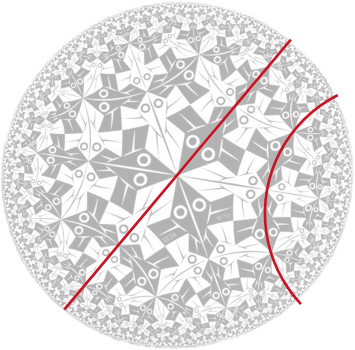
- Tous les poissons ont la même taille.

Le modèle du disque : l'infini dans une coquille de noix

M.C. Escher,
Circle Limit I (1958).

- Tous les poissons ont la même taille.
- $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. Courbure -1 : plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.

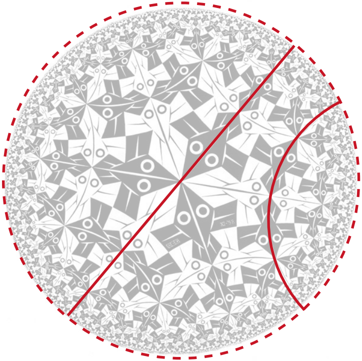
Le modèle du disque : l'infini dans une coquille de noix



M.C. Escher,
Circle Limit I (1958).

- Tous les poissons ont la même taille.
- $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. Courbure -1 : plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.
- Les poissons nagent selon des géodésiques : plongement isométrique $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^2$.

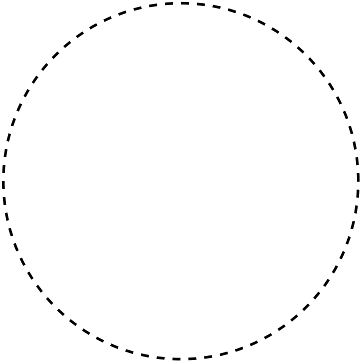
Le modèle du disque : l'infini dans une coquille de noix



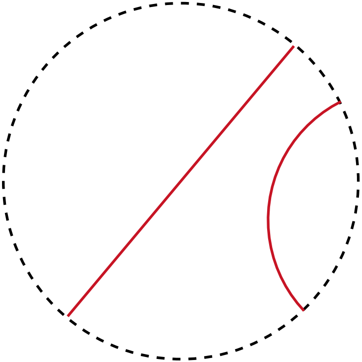
M.C. Escher,
Circle Limit I (1958).

- Tous les poissons ont la même taille.
- $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. Courbure -1 : plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.
- Les poissons nagent selon des géodésiques : plongement isométrique $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^2$.

Isométries et cercle à l'infini

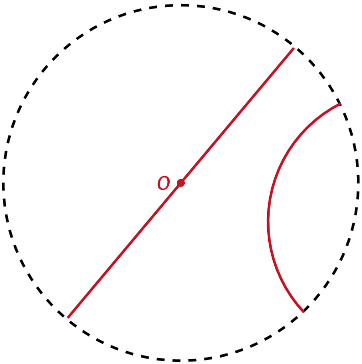


Isométries et cercle à l'infini



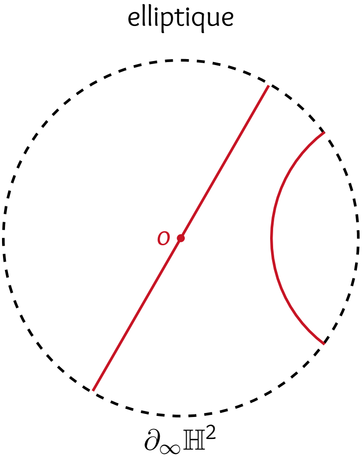
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$

Isométries et cercle à l'infini



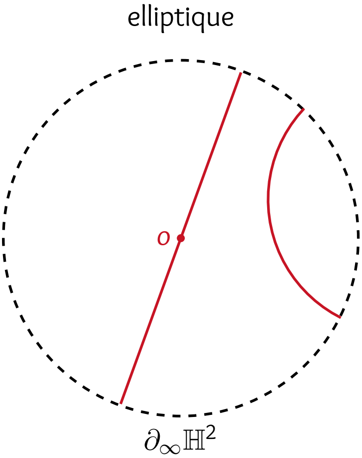
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Isométries et cercle à l'infini



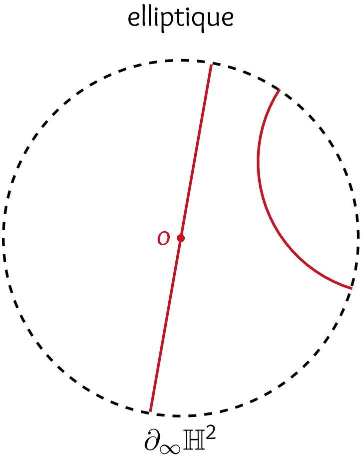
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes

Isométries et cercle à l'infini



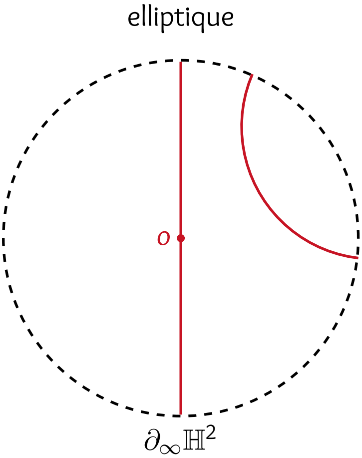
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique,

Isométries et cercle à l'infini



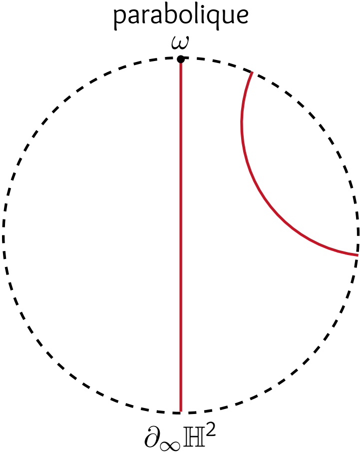
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique,

Isométries et cercle à l'infini



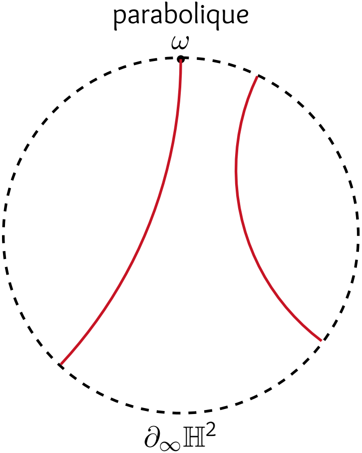
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique,

Isométries et cercle à l'infini



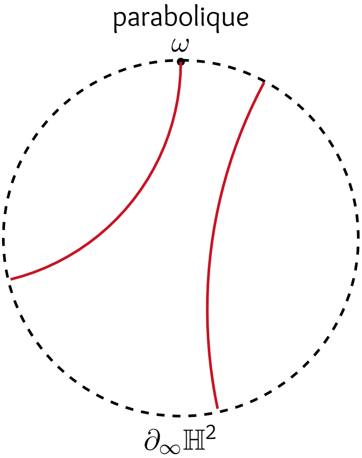
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique,

Isométries et cercle à l'infini



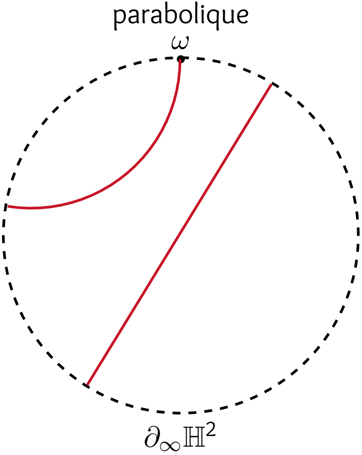
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique,

Isométries et cercle à l'infini



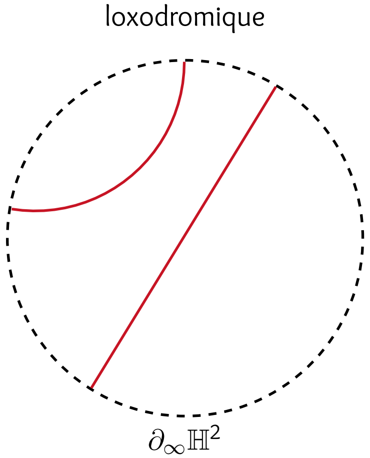
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique,

Isométries et cercle à l'infini



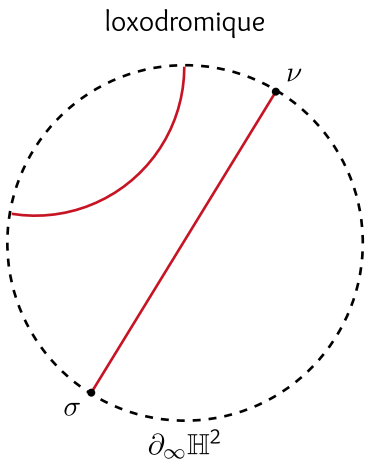
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique,

Isométries et cercle à l'infini



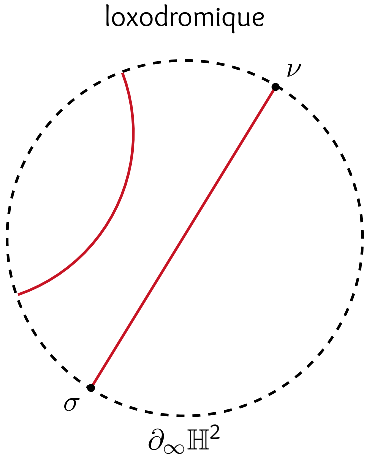
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.

Isométries et cercle à l'infini



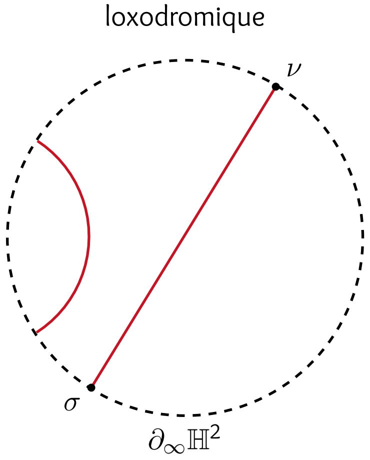
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.

Isométries et cercle à l'infini



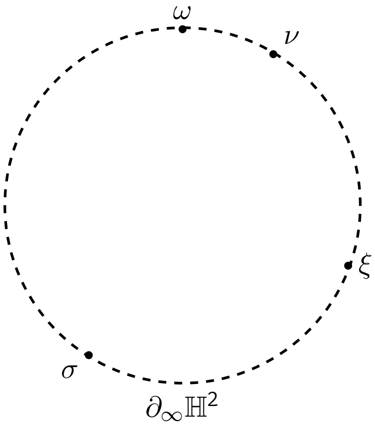
- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.

Isométries et cercle à l'infini



- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.

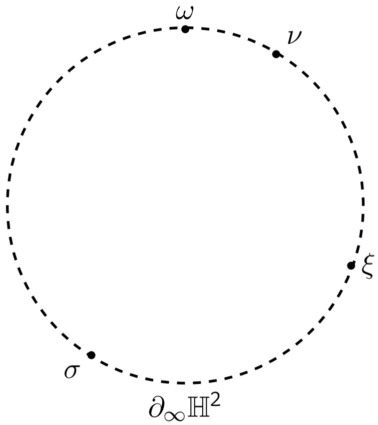
Isométries et cercle à l'infini



- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.
- L'action est 3-transitive au bord ; ni distance, ni mesure invariante.

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \curvearrowright \partial_\infty \mathbb{H}^2$$

Isométries et cercle à l'infini



- Les géodésiques joignent les points du cercle à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$
- Isométrie de $\mathbb{H}^2 \rightsquigarrow$ transformation de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. 3 sortes : elliptique, parabolique, loxodromique.
- L'action est 3-transitive au bord ; ni distance, ni mesure invariante.
- Mais un invariant de 4 points : le birapport.

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \curvearrowright \partial_\infty \mathbb{H}^2 \equiv \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \curvearrowright \widehat{\mathbf{R}}.$$

Du cercle à la sphère

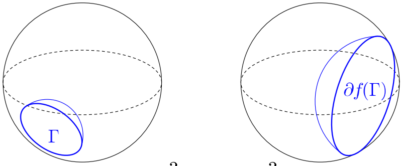
$\mathbb{H}^3$ est l'espace hyperbolique de dimension 3. $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ est une sphère de dimension 2.

Du cercle à la sphère

$\mathbb{H}^3$ est l'espace hyperbolique de dimension 3. $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ est une sphère de dimension 2. Dans le modèle de la boule, les plans totalement géodésiques ($\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^3$) sont des portions de sphères orthogonales à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

Du cercle à la sphère

$\mathbb{H}^3$ est l'espace hyperbolique de dimension 3. $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ est une sphère de dimension 2. Dans le modèle de la boule, les plans totalement géodésiques ($\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^3$) sont des portions de sphères orthogonales à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.



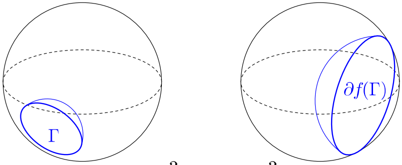
$$f : \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$$

$$\partial f \in \mathrm{Conf}(\mathrm{S}^2)$$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \curvearrowright \partial_\infty \mathbb{H}^2 \equiv \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \curvearrowright \widehat{\mathbf{R}},$$

Du cercle à la sphère

$\mathbb{H}^3$ est l'espace hyperbolique de dimension 3. $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ est une sphère de dimension 2. Dans le modèle de la boule, les plans totalement géodésiques ($\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^3$) sont des portions de sphères orthogonales à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.



$$f : \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$$

$$\partial f \in \mathrm{Conf}(\mathrm{S}^2)$$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \curvearrowright \partial_\infty \mathbb{H}^3 \equiv \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \curvearrowright \widehat{\mathbf{C}}.$$

Autres espaces hyperboliques : $\mathbb{H}^m = \mathrm{SO}_0(n,1)/(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(1))$, $(m \geqslant 2)$, $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}} = \mathrm{SU}(2,1)/(\mathrm{SU}(2) \times S^1)$ (dim réelle 4).

Quasiisométries, quasigéodésiques

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est un plongement quasiisométrique s'il existe $\lambda > 0, C \geqslant 0$ tels que

$$\lambda^{-1} d(x, x') - c \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \lambda d(x, x') + c.$$

Une quasigéodésique est un plongement quasiisométrique $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R}_{(+)} \to X$.

Quasiisométries, quasigéodésiques

Définition

Soient X et Y deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est un plongement quasiisométrique s'il existe $\lambda > 0, C \geqslant 0$ tels que

$$\lambda^{-1} d(x,x') - c \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \lambda d(x,x') + c.$$

Une quasigéodésique est un plongement quasiisométrique $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R}_{(+)} \to X$.

Estimée longueur-distance pour les quasigéodésiques

Pour simplifier : $c = 0$. Alors pour tous $a, b \in \mathbf{R}$

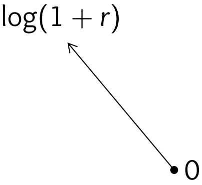
$$\text{longueur}(\widetilde{\gamma}([a,b])) \leqslant \underset{\text{dep. } \lambda}{\overset{\Lambda}{\sqcup}} d(\widetilde{\gamma}(a), \widetilde{\gamma}(b)).$$

A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien

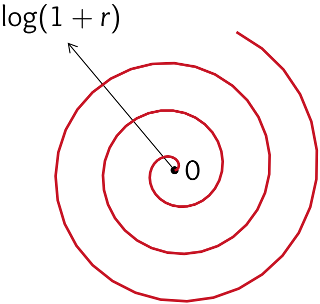
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



A quoi ressemble une quasigéodésique ?

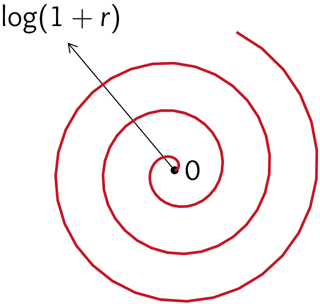
Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) &= t, \\ \theta(t) &= \log(1+t). \end{cases}$$

A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien

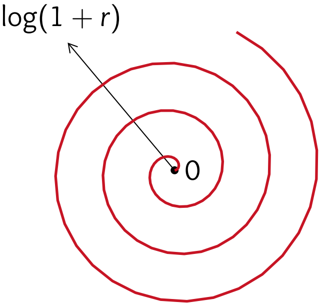


$$\begin{cases} r(t) & = t, \\ \theta(t) & = \log(1+t). \end{cases}$$

Dans le plan hyperbolique

A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



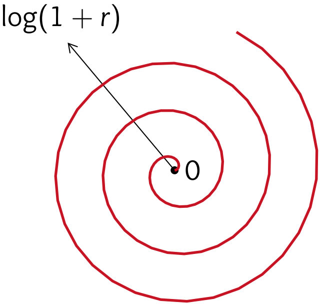
$$\begin{cases} r(t) &= t, \\ \theta(t) &= \log(1+t). \end{cases}$$

Dans le plan hyperbolique

M.C. Escher,
Circle Limit III (1959).

A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



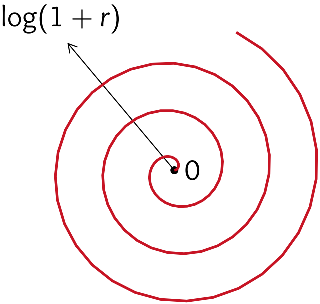
$$\begin{cases} r(t) & = t, \\ \theta(t) & = \log(1+t). \end{cases}$$

Dans le plan hyperbolique

M.C. Escher,
Circle Limit III (1959).

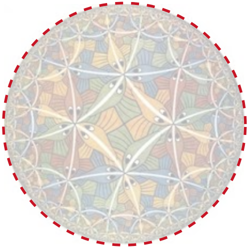
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) &= t, \\ \theta(t) &= \log(1+t). \end{cases}$$

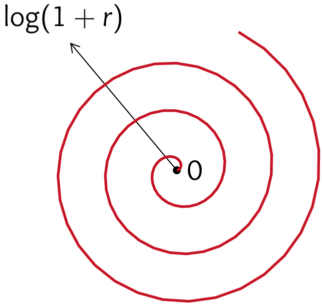
Dans le plan hyperbolique



M.C. Escher,
Circle Limit III (1959).

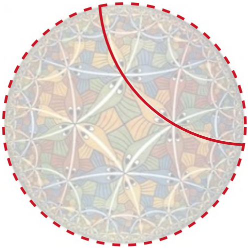
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) &= t, \\ \theta(t) &= \log(1+t). \end{cases}$$

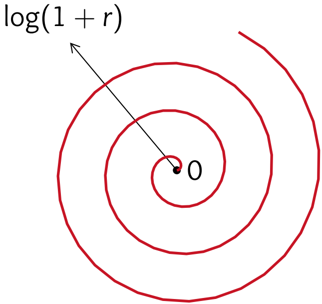
Dans le plan hyperbolique



M.C. Escher,
Circle Limit III (1959).

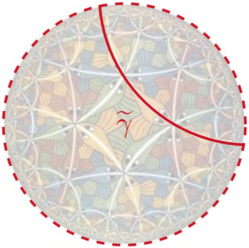
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



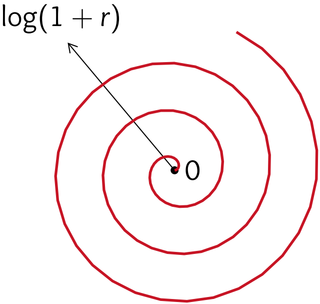
$$\begin{cases} r(t) & = t, \\ \theta(t) & = \log(1+t). \end{cases}$$

Dans le plan hyperbolique



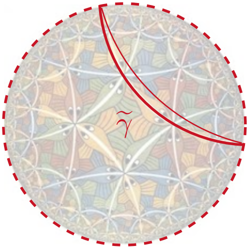
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) & = t, \\ \theta(t) & = \log(1+t). \end{cases}$$

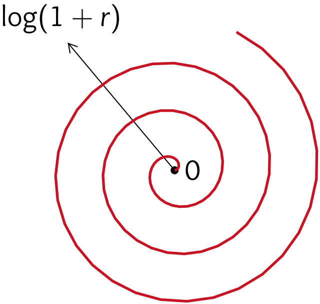
Dans le plan hyperbolique



$\widetilde{\gamma}$ quasigéodésique

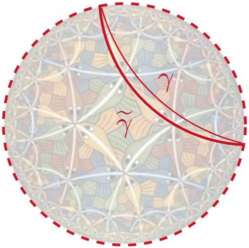
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) &= t, \\ \theta(t) &= \log(1+t). \end{cases}$$

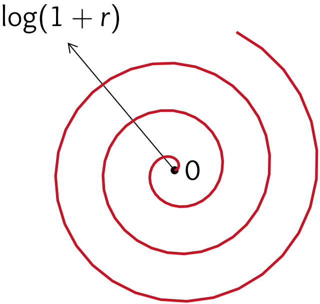
Dans le plan hyperbolique



$\widetilde{\gamma}$ quasigéodésique

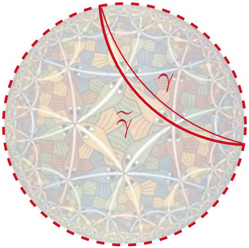
A quoi ressemble une quasigéodésique ?

Dans le plan euclidien



$$\begin{cases} r(t) & = t, \\ \theta(t) & = \log(1+t). \end{cases}$$

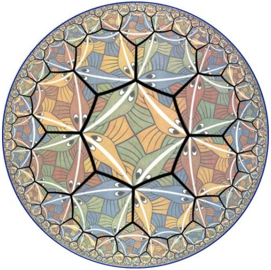
Dans le plan hyperbolique



$\widetilde{\gamma}$ quasigéodésique
(γ géodésique.)

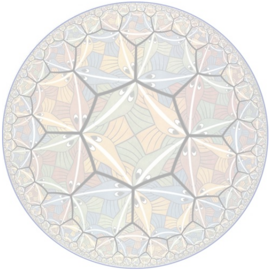
Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

2×2 poissons : 1 octogone.



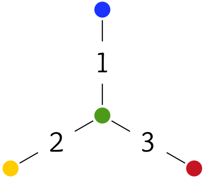
Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

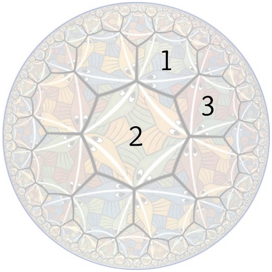
2×2 poissons : 1 octogone. Soit $\Gamma < W$ le sous-groupe d'isométries du pavage maximal sans torsion respectant les poissons colorés.



Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

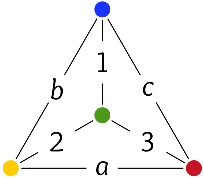
2×2 poissons : 1 octogone. Soit $\Gamma < W$ le sous-groupe d'isométries du pavage maximal sans torsion respectant les poissons colorés.

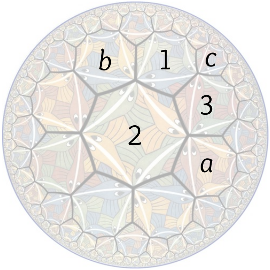




Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

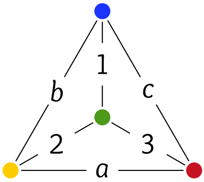
2×2 poissons : 1 octogone. Soit $\Gamma < W$ le sous-groupe d'isométries du pavage maximal sans torsion respectant les poissons colorés.

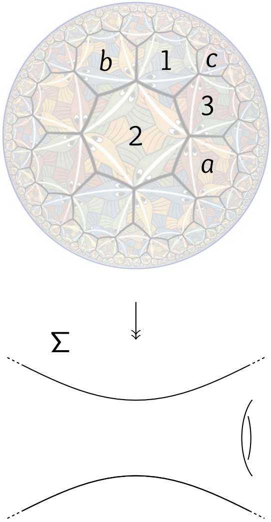




Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

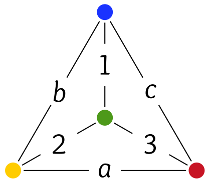
2×2 poissons : 1 octogone. Soit $\Gamma < W$ le sous-groupe d'isométries du pavage maximal sans torsion respectant les poissons colorés.



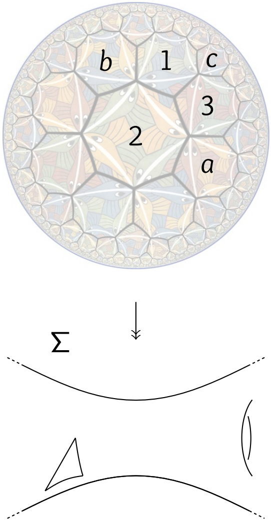


Le plan de nage des poissons de *Circle Limit III*

2×2 poissons : 1 octogone. Soit $\Gamma < W$ le sous-groupe d'isométries du pavage maximal sans torsion respectant les poissons colorés.

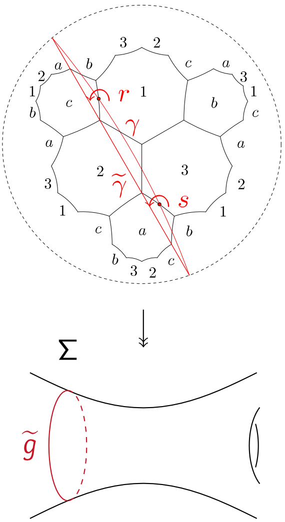


$\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est une surface hyperbolique compacte à 5 trous pavée par 24 poissons (ou 96 triangles de Möbius).



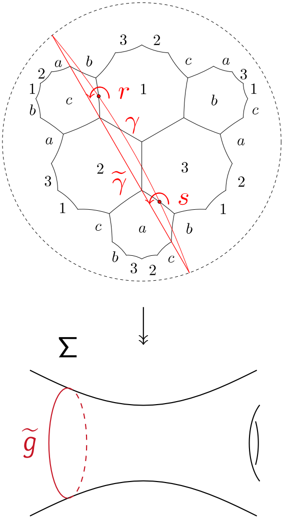
La stabilité des quasigéodésiques

$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$.



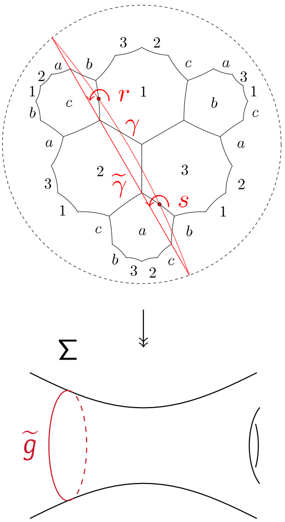
La stabilité des quasigéodésiques

$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$. Soit g de longueur minimale dans la classe d'homotopie libre de $\widetilde{g}$.



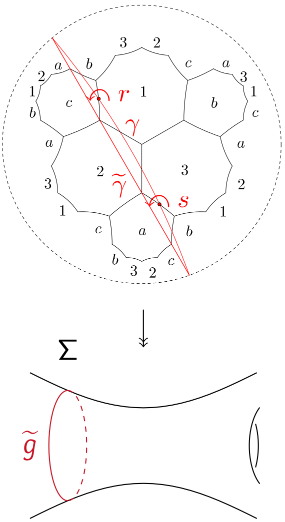
La stabilité des quasigéodésiques

$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$. Soit g de longueur minimale dans la classe d'homotopie libre de $\widetilde{g}$.
$\exists\ g$: compacité,



La stabilité des quasigéodésiques

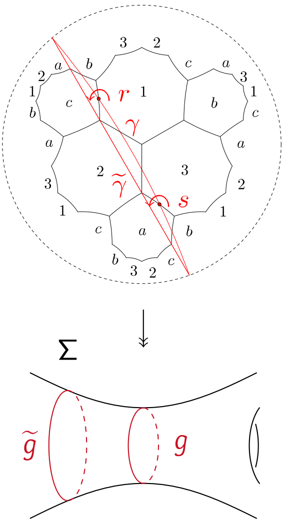
$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$. Soit g de longueur minimale dans la classe d'homotopie libre de $\widetilde{g}$.
$\exists! g$: compacité, courbure < 0.



La stabilité des quasigéodésiques

$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$. Soit g de longueur minimale dans la classe d'homotopie libre de $\widetilde{g}$.
$\exists! g$: compacité, courbure < 0.

- Dans $\pi_1(\Sigma) = \Gamma$, $[g]$ loxodromique :
- $[g] = rs \in \Gamma$, $r, s \in W$ renversements.

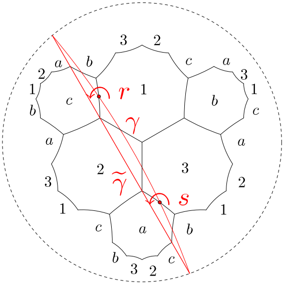


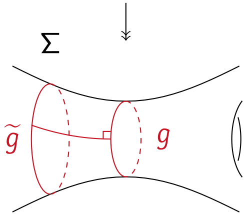
La stabilité des quasigéodésiques

$\widetilde{\gamma}$ relève $\widetilde{g} : S^1 \to \Sigma$. Soit g de longueur minimale dans la classe d'homotopie libre de $\widetilde{g}$.
$\exists! g$: compacité, courbure < 0.

- Dans $\pi_1(\Sigma) = \Gamma$, $[g]$ loxodromique :
- $[g] = rs \in \Gamma$, $r, s \in W$ renversements.

$d(\widetilde{\gamma}(t), \gamma) = cste$: $\widetilde{\gamma}$ hypercycle
$\widetilde{\gamma}$ quasigéodésique.





La poursuite géodésique

Théorème – forme moderne du lemme de Morse (années 1930)

Soit $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ une quasigéodésique.

La poursuite géodésique

Théorème – forme moderne du lemme de Morse (années 1930)

Soit $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ une quasigéodésique. Il existe $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ géodésique qui poursuit $\widetilde{\gamma}$

La poursuite géodésique

Théorème – forme moderne du lemme de Morse (années 1930)

Soit $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ une quasigéodésique. Il existe $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ géodésique qui poursuit $\widetilde{\gamma}$, dans le sens où

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(\widetilde{\gamma}, \gamma) < +\infty.$$

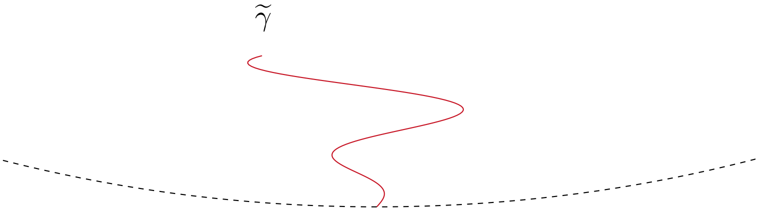
La poursuite géodésique

Théorème – forme moderne du lemme de Morse (années 1930)

Soit $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ une quasigéodésique. Il existe $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ géodésique qui poursuit $\widetilde{\gamma}$, dans le sens où

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(\widetilde{\gamma}, \gamma) \leqslant H(\lambda, c).$$

De plus, la dépendance de H par rapport à c est linéaire.



Une quasigéodésique $\mathbf{R} \to \mathbb{H}^2$ (continue) et sa poursuite.

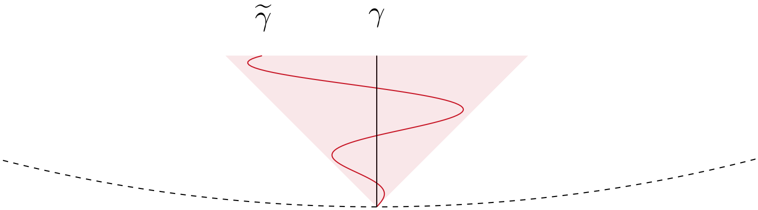
La poursuite géodésique

Théorème – forme moderne du lemme de Morse (années 1930)

Soit $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ une quasigéodésique. Il existe $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbb{H}^n$ géodésique qui poursuit $\widetilde{\gamma}$, dans le sens où

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(\widetilde{\gamma}, \gamma) \leqslant H(\lambda, c).$$

De plus, la dépendance de H par rapport à c est linéaire.

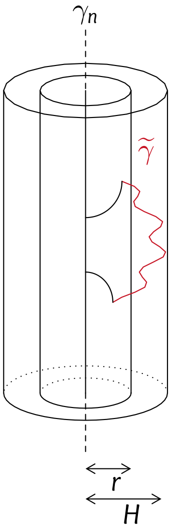


Une quasigéodésique $\mathbf{R} \to \mathbb{H}^2$ (continue) et sa poursuite.

Idée de preuve d'après Efremovich et Tihomirova (1964)

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, raccorder $\widetilde{\gamma}(0)$ et $\widetilde{\gamma}(n)$ avec γ_n.
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de γ_n :

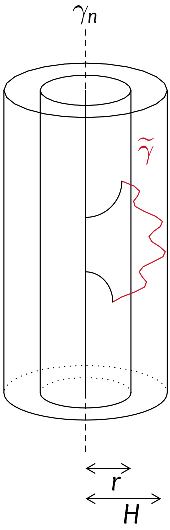
$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r dz^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$



Idée de preuve d'après Efremovich et Tihomirova (1964)

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, raccorder $\widetilde{\gamma}(0)$ et $\widetilde{\gamma}(n)$ avec γ_n.
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de γ_n :

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r dz^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

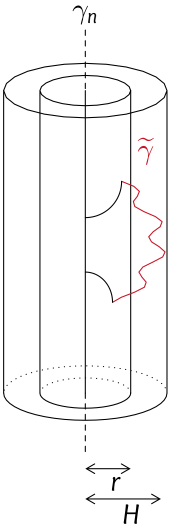


Idée de preuve d'après Efremovich et Tihomirova (1964)

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, raccorder $\widetilde{\gamma}(0)$ et $\widetilde{\gamma}(n)$ avec γ_n.
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de γ_n :

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r dz^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

- Il y a contraction des longueurs des courbes à distance $\geqslant r$ lors de la projection sur γ_n, facteur $\cosh r$.

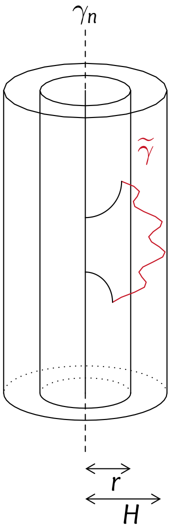


Idée de preuve d'après Efremovich et Tihomirova (1964)

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, raccorder $\widetilde{\gamma}(0)$ et $\widetilde{\gamma}(n)$ avec γ_n.
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de γ_n :

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r dz^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

- Il y a contraction des longueurs des courbes à distance $\geqslant r$ lors de la projection sur γ_n, facteur $\cosh r$.
- $\widetilde{\gamma}$ ne peut pas rester longtemps loin : puis estimées longueur distance, et passage à la limite $n \to +\infty$ (Ascoli).



Prolongement des quasiisométries à la sphère à l'infini

Théorème – suite aux travaux de Mostow, Margulis (années 1970)

Soient H et H' et $f : H \to H'$ un plongement quasiisomisométrique. Il existe $\partial_\infty f : S^{n-1} \to S^{m-1}$. De plus $\partial_\infty f$ est Hölder-continue, Hölder-expansive et quasisymétrique : il existe $K > 0, \alpha \geqslant 1$ tels que si $d(x,y) \leqslant d(x,z)$ alors

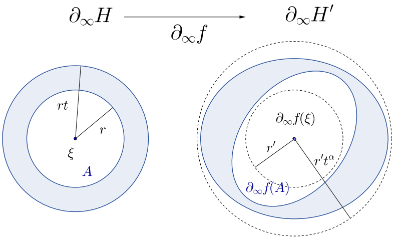
$$K^{-1}\left(\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)^{1/\alpha} \leqslant \frac{d(\partial_\infty f(x), \partial_\infty f(z))}{d(\partial_\infty f(x), \partial_\infty f(y))} \leqslant K\left(\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)^{\alpha}.$$

Prolongement des quasiisométries à la sphère à l'infini

Théorème – suite aux travaux de Mostow, Margulis (années 1970)

Soient H et H' et $f : H \to H'$ un plongement quasiisomisométrique. Il existe $\partial_\infty f : S^{n-1} \to S^{m-1}$. De plus $\partial_\infty f$ est Hölder-continue, Hölder-expansive et quasisymétrique : il existe $K > 0, \alpha \geqslant 1$ tels que si $d(x,y) \leqslant d(x,z)$ alors

$$K^{-1}\left(\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)^{1/\alpha} \leqslant \frac{d(\partial_\infty f(x), \partial_\infty f(z))}{d(\partial_\infty f(x), \partial_\infty f(y))} \leqslant K\left(\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right)^{\alpha}.$$



Dimension topologique des sphères à l'infini

Proposition

S'il existe un plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, alors $n \leqslant m$.

Dimension topologique des sphères à l'infini

Proposition

S'il existe un plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, alors $n \leqslant m$.

Démonstration.

Soit f un tel plongement. Alors $\partial_\infty f$ est un plongement topologique $\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{m-1}$. $\square$

Dimension topologique des sphères à l'infini

Proposition

S'il existe un plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, alors $n \leqslant m$.

Démonstration.

Soit f un tel plongement. Alors $\partial_\infty f$ est un plongement topologique $\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{m-1}$. □

- On n'a pas utilisé là le caractère quasisymétrique de $\partial_\infty f$.

Dimension topologique des sphères à l'infini

Proposition

S'il existe un plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, alors $n \leqslant m$.

Démonstration.

Soit f un tel plongement. Alors $\partial_\infty f$ est un plongement topologique $\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{m-1}$. □

- On n'a pas utilisé là le caractère quasisymétrique de $\partial_\infty f$.
- Existe-t-il un plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}} \to \mathbb{H}^4$? (Les bords étant tous les deux de dimension topologique 3)

La dimension conforme

Définition – Pansu (1989), version légèrement reformulée

Soit Z un espace métrique. La dimension conforme de Z est

$$\mathrm{Cdim}(Z) = \inf \left\{ \dim_{\mathrm{Hausdorff}}(Z, d') : (Z, d) \to_{id} (Z, d') \text{homéo. quasisym.} \right\}.$$

La dimension conforme

Définition – Pansu (1989), version légèrement reformulée

Soit Z un espace métrique. La dimension conforme de Z est

$$\mathrm{Cdim}(Z) = \inf \left\{ \dim_{\mathrm{Hausdorff}}(Z, d') : (Z, d) \to_{id} (Z, d')\text{homéo. quasisym.} \right\} .$$

H	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$
$\dim \partial_\infty H$	3	3
$\mathrm{Cdim}\, \partial_\infty H$	3	4

La dimension conforme

Définition – Pansu (1989), version légèrement reformulée

Soit Z un espace métrique. La dimension conforme de Z est

$$\mathrm{Cdim}(Z) = \inf \left\{ \dim_{\text{Hausdorff}}(Z, d') : (Z, d) \to_{id} (Z, d')\text{homéo. quasisym.} \right\}.$$

H	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}}$
$\dim \partial_\infty H$	3	3
$\mathrm{Cdim}\, \partial_\infty H$	3	4

La dimension conforme augmente lors d'un plongement quasisymétrique. Conclusion : pas de plongement quasiisométrique $\mathbb{H}^2_{\mathbf{C}} \to \mathbb{H}^4$.

Géométrie à grande échelle sous-linéaire

Définition – Cornulier (2011)

X et Y espaces métriques. On fixe $o \in X$, puis $|x| := d(o, x)$. X et Y sont sous-linéairement bilipschitziennement équivalents (SBE) s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, $\lambda \geqslant 1$ et $u(r) \ll r$ tels que

$$\lambda^{-1} d(x, x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \lambda d(x, x') + u(|x| + |x'|),$$

$$d(f \circ g(x), x) \leqslant u(|x|).$$

Géométrie à grande échelle sous-linéaire

Définition – Cornulier (2011)

X et Y espaces métriques. On fixe $o \in X$, puis $|x| := d(o,x)$. X et Y sont sous-linéairement bilipschitziennement équivalents (SBE) s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, $\lambda \geqslant 1$ et $u(r) \ll r$ tels que

$$\lambda^{-1} d(x,x') - u(|x| + |x'|) \leqslant d(f(x), f(x')) \leqslant \lambda d(x,x') + u(|x| + |x'|),$$

$$d(f \circ g(x), x) \leqslant u(|x|).$$

Théorème – Cornulier (2016)

Si X et Y sont des espaces hyperboliques, $\partial_\infty f$ est bihölderienne.

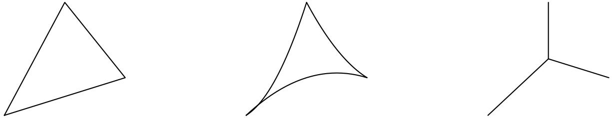
Théorème – (2017)

$\partial_\infty f$ est un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique.
Dans certains cas favorables, une dimension conforme est invariante.

Ce que cet exposé ne dit pas

Dans cet exposé

- on a caché la généralité sous laquelle les théorèmes s'appliquent, l'hyperbolicité au sens dégagé par Gromov (1987).



$R \ll \delta$ $\qquad$ $R \sim \delta$ $\qquad$ $R \gg \delta$

- on n'a pas défini intrinsèquement la structure des sphères à l'infini.
- on n'a pas expliqué pourquoi on étudie les quasiisométries, ni les équivalences bilipschtziennes (les raisons sont un peu différentes).

A voir et à lire...

1. *Coxeter discusses the math behind Escher's circle limit III* (YouTube).
2. J. Leys, *Ceci n'est pas une géodésique !* – Images des mathématiques, CNRS, 4 avril 2018 (piste verte).
3. E. Ghys, *Les triangles d'Euclide, de Gauss et de Gromov* – Images des mathématiques, CNRS, 27 avril 2009 (piste bleue).

Merci pour votre attention.