CORRECTIONS DE CERTAINS EXERCICES

1. Matrices

Exercice 3

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants :
— Soins réguliers
— Chirurgie
— Soins intensifs
— Sortie

Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures.

	Soins réguliers	Chirurgie	Soins intensifs	Sortie
Soins réguliers	0.6	0.2	0	0.2
Chirurgie	0.1	0	0.8	0.1
Soins intensifs	0.5	0	0.33	0.17
Sortie	0	0	0	0

Ce tableau se lit de la manière suivante. Un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0.6 de se trouver le lendemain en soins réguliers, 0.2 de se trouver en chirurgie, 0 de se trouver en soin intensifs, 0.2 de sortir, etc.

1. On suppose qu'il y a 14 patients en soins régulier, 5 en chirurgie et 7 en soins intensifs. Combien de repas doit on prévoir pour ces patients pour le jour suivant ?
2. On suppose que le jour zéro, 10 patients entrent en soin réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour. Une simulation sur tableur de cette situation est donnée en annexe. Quelle conjecture faites-vous pour la répartition des patients dans cet hôpital ?
3. Modéliser cette situation à l'aide de matrices et exprimer la conjecture de la question 2 en termes de matrices.

Exercice 4

Enoncé : voir *Hyperbole*, exercice 84 [H20].

Solution de l'exercice 3.

1. On appelle P la matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note X_j^t la variable aléatoire donnant le nombre de patients dans le service j au jour t. X_j^{t+1} est la somme, pour i allant de 1 à 4, de la somme de X_i^t variables de Bernoulli de paramètres $p_{i,j}$; par linéarité de l'espérance
$$\mathbf{E}(X_j^{t+1}) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{E}(X_i) p_{i,j}.$$
En particulier, $\begin{pmatrix}\mathbf{E}(X_1) & \mathbf{E}(X_2) & \mathbf{E}(X_3) & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 5 & 7 & *\end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix}12.4 & 1.4 & 6.31 & *\end{pmatrix}$. Le nombre de repas à prévoir est donc d'au moins
$$3 \times (12.4 + 1.4 + 6.31) = 3 \times 20.11 = 60.33.$$
2. D'après les données fournies, on peut conjecturer qu'il y a convergence vers un état stationnaire.

3. Notons P_0 la matrice identique à P, mais avec $p_{44} = 0$. La loi d'évolution de la distribution $V(t)$ des patients dans les services (représentée par un vecteur ligne) est alors donnée par

$$V(t+1) = V(t)P_0 + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire est alors une solution de l'équation $V = VP_0 + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou encore

$$V(I_4 - P_0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Notons qu'un calcul donne

$$\begin{aligned}\det(I_4 - P_0) &= \begin{vmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & -0.8 & -0.1 \\ -0.5 & 0 & 0.67 & -0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -0.5 \cdot (0.2 \cdot 0.8) + 0.67 \cdot (0.4 - 0.2 \cdot 0.1) \\ &= -0.08 + 0.67 \cdot 0.38 = 0.1746\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution.

Solution de l'exercice 4.

1. **a)** $\alpha = 3\pi/4$

   b) $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

2. **a)** -0.75

   b) $M' = \begin{pmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix}$

3. **a)** $M'' = M'M = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/8 & 3\sqrt{2}/8 \\ -3\sqrt{2}/8 & 3\sqrt{2}/8 \end{pmatrix}$. (Remarque : En principe on doit faire attention à l'ordre, mais là comme M' est scalaire, elle commute à M donc ce n'est pas grave pour le résultat.)

   b) On met les coordonnées des sommets du carré rouge (sous forme matrice colonne) dans une grande matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Alors les sommets du carré vert on pour matrice $V = M''R$, c'est-à-dire

$$V = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/4 & 9\sqrt{2}/8 & 9\sqrt{2}/8 & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 3\sqrt{2}/8 & -3\sqrt{2}/8 & 0 \end{pmatrix}$$

4. De manière astucieuse, posons

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

où c et s sont inconnues, avec $c^2 + s^2 = 1$. Cela nous donne un système linéaire, qu'on résoud comme on peut ; l'angle recherché est $\beta = 2\pi/3$. Les coordonnées recherchées sont données sous forme de vecteurs colonne par

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} R &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & -1/2-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3}/2 & -1-\sqrt{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}/2-1 & -1/2+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

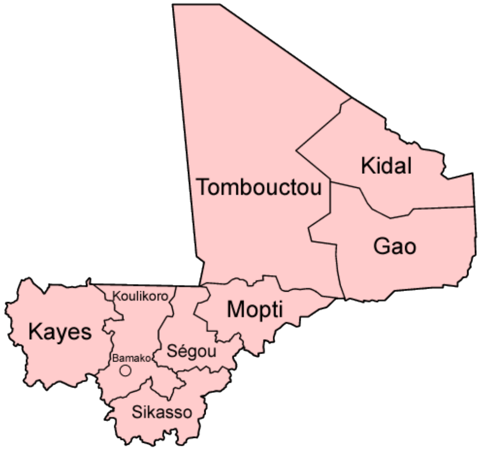
2. Graphes

Exercice 1 Modélisation

Voici deux situations susceptibles d'être modélisées par un graphe.

(1) Adeline, Bakary, Camille, Damien, Élodie, Farid et Gabriel sont inscrits sur un réseau social.
- — Adeline est amie avec Bakary, Élodie et Farid
- — Bakary est ami avec Adeline, Damien et Farid
- — Camille est amie avec Élodie et Gabriel
- — Damien est ami avec Bakary, Élodie et Gabriel.

(2) Les différentes régions du Mali :



Proposer des questions pour motiver l'utilisation des notions suivantes :
- degré d'un sommet
- graphe complet
- chaîne et longueur de chaîne
- graphe connexe

Exercice 2 Chemins eulériens

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un cube, en s'interdisant de passer deux fois par la même arête. Quel est le nombre maximum d'arêtes que peut parcourir la fourmi ?
2. *(les sept ponts de Königsberg)* Sur la Figure 1, un plan de la ville de Königsberg à l'époque d'Euler (*circa* 1736). Le problème est le suivant : est-il possible de parcourir la ville en passant une est une seule fois sur chacun des sept ponts ?
   a) Construire un graphe où les sommets sont les quatre rives et les arêtes les sept ponts les reliant
   b) Résoudre le problème
3. Un jeu de dominos est constitué de toutes les paires $\{i, j\}$, $0 \leqslant i \leqslant 6$, $0 \leqslant j \leqslant 6$. Tom a perdu le domino ⚅⚄ de son jeu.

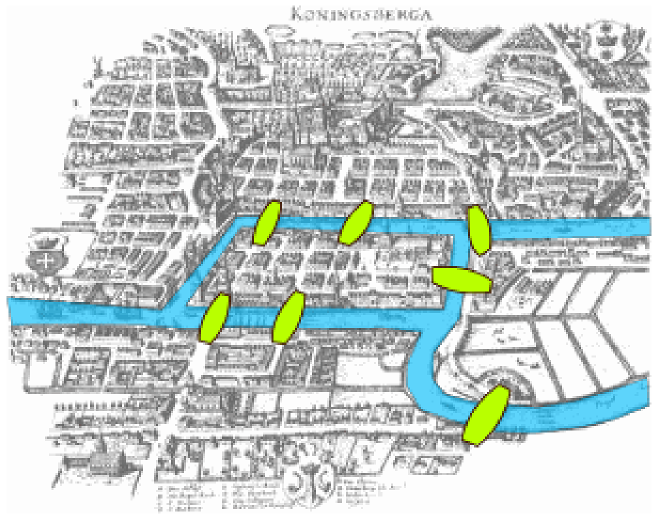


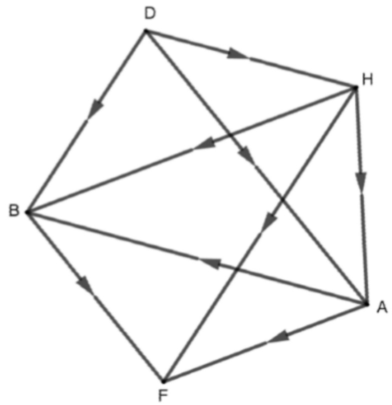
FIGURE 1. Les sept ponts de Königsberg

   a) Il décide d'aligner toutes les pièces de son jeu les unes derrière les autres en respectant la règle usuelle. Y parviendra-t-il ?
   b) Il décide maintenant de les poser en rond en repectant la règle. Même question.
   c) Même question en supposant maintenant que Tom enlève tous les dominos portant un 6.

Exercice 3 Parcours sportif

BAC ES - Métropole Spécialité Mathématiques 2018

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté insique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F. Les sommets sont : D départ, B banc pour abdominaux, H haies, A anneaux, F fin du parcours. Les arêtes représentent les différents sentiers.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alaphabétique.
   a) Déterminer M
   b) On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes. Est-possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?

Exercice 4 Tir à l'arc

Enoncé : Voir *Hyperbole*, exercice 80 [H20].

Exercice 5 Modèle de diffusion d'Ehrenfest

Enoncé : Voir *Barbazo*, exercice 95 [B20].

Exercice 6 Modèle proie-prédateur discret

Bac S Amérique du nord Spécialité mathématiques, 2018.

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1$^{\text{er}}$ juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards. On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1$^{\text{er}}$ juillet de l'année $2012 + n$.

Partie A — Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 1,1 \cdot u_n - 2000 \cdot v_n \\ v_{n+1} &= 2 \times 10^{-5} u_n + 0,6 \cdot v_n \end{cases}$$

1. a) On considère la matrice colonne $\mathrm{U}_n = \binom{u_n}{v_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Déterminer la matrice A telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.
   b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.
2. On considère les matrices

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{15\,000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}.$$

   On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0$.
   b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.
   c) On admet que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{2,8\times10^7 + 2\times10^6\times0,7^n}{15} \\ v_{n+1} &= \frac{1\,400+400\times0,7^n}{15}. \end{cases}$$

   Décrire l'évolution des deux populations.

Solution de l'exercice 1

Les questions suivantes ne sont que des suggestions.

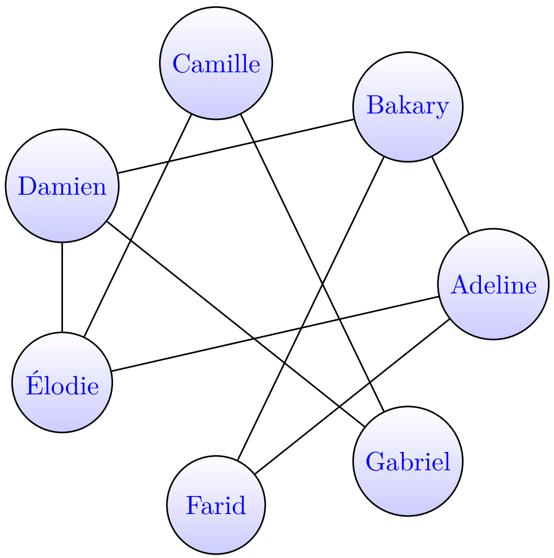
Degré d'un sommet (2) Combien la région de Bamako a-t-elle de régions limitrophes ?

Graphes complet (1) Dessiner les amitiés entre Adeline, Camille, Farid et Gabriel. Si tous les quatres se réunissent, combien de présentations doivent être effectuées ?

Chaîne et longueur de chaîne (1) Adeline doit faire passer un message à Gabriel ; comment s'y prend-elle ?

(2) Au Mali, chaque paire de capitale de régions voisines est reliée par un bus. Combien de bus doit-on prendre pour aller de Tombouctou à Bamako ?

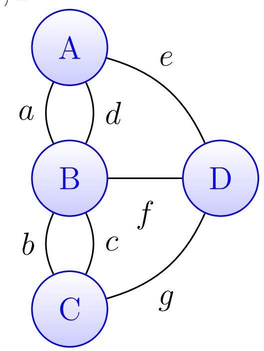
Graphe connexe (1) Si chaque utilisateur du réseau social relaye une nouvelle à tous ses amis à chaque fois qu'il l'entend, Adeline peut-elle à elle seule répandre une fausse rumeur sur tout le réseau ? Si oui, combien faut-il de blocages au minimum pour que ce ne soit plus le cas ?



Solution de l'exercice 2

1. Dans le graphe du cube, tous les sommets sont de degré 3. Le sous-graphe parcouru à la fin par la fourmi sera tel que le nombre de sommets de degré 2 sera 0 ou 2 (le départ et l'arrivée). Les degrés d'un tel sous-graphe, s'il à 10 arêtes ou plus, sont donc au plus
$$\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}.$$
La somme des degrés est 18, donc 9 arêtes au plus. Pour vérifier que la fourmi peut effectivement parcourir 9 arêtes, une possibilité est
$$000 - 001 - 011 - 010 - 000 - 100 - 001 - 111 - 110 - 100.$$

2. a) Sur le graphe suivant de la ville de Königsberg, on a donné aux ponts les lettres a, b, c, d, e, f, g, et aux zones délimitées par le fleuve $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$:



   b) Le nombre de sommets de degré impair est 4, ce graphe n'est pas eulérien[1] .

3. a) On forme le graphe $\mathcal{D}$ dont l'ensemble des sommets est
$$\mathrm{S} = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$
et l'ensemble des arêtes est l'ensemble des dominos de Tom. Sans perte de généralité, on exclut les dominos de type (i, i).

1. Les ponts d et c ont été détruits pendant la seconde guerre mondiale, et on peut vérifier que le parcours est devenu possible de nos jours, par contre la ville s'appelle Kaliningrad.

Dans le graphe $\mathcal{D}$, on a que

deg(⚀) $= 5$ deg(⚁) $= 5$ deg(⚂) $= 5$
deg(⚃) $= 5$ deg(⚄) $= 4$ deg(⚅) $= 4$

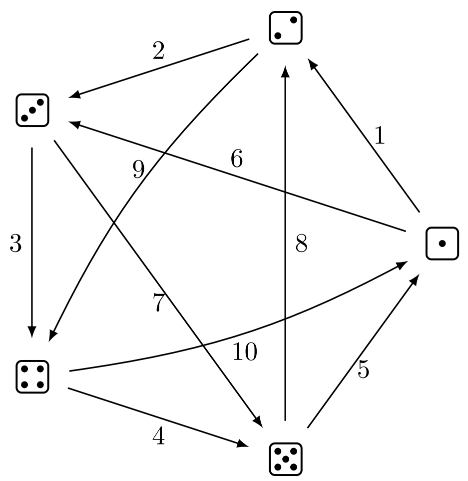
Donc $\mathcal{D}$ n'est pas eulérien.

b) Non, il ne peut pas. Aucun sommet de degré impair ne serait autorisé.

c) Appelons $\mathcal{D}'$ le nouveau graphe. cette fois-ci

deg(⚀) $= 4$ deg(⚁) $= 4$ deg(⚂) $= 4$
deg(⚃) $= 4$ deg(⚄) $= 4$.

Donc il n'y a pas d'obstruction possible au critère donné par Euler. Cette fois-ci on peut, comme ci-contre.



Solution de l'exercice 3

1. Le graphe est d'ordre 5, qui est le cardinal de l'ensemble $\{A, B, D, F, H\}$.
2. a) Par lecture graphique, M est la matrice suivante

$$\begin{array}{r} \text{anneaux} \\ \text{banc} \\ \text{départ} \\ \text{fin} \\ \text{haies} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) D'après la donnée de M^3, qui contient un '3' en position (D,F), c'est possible, et ceci de 3 manières différentes. Les chemins sont DABF, DHAF et DHBF.

Solution de l'exercice 4

1. $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Pour tout $n \geqslant 0$,
$$\begin{aligned}(a_{n+1}; b_{n+1}) &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} (a_n; b_n) \\ &= (0,9a_n + 0,4b_n, 0,1a_n + 0,6b_n).\end{aligned}$$
Donc $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4(b_n + a_n) - 0,4a_n = 0,5a_n + 0,4$.
3. a) Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,8 = 0,5a_n - 0,4 = 0,5u_n$. Donc u_n est une suite géométrique de raison $1/2$. Le premier teme est $u_0 = 0,5 - 0,8 = -0,3$.
   b) $u_n = -\frac{0,3}{2^n}$ et $a_n = 0,8 - \frac{0,3}{2^n}$.
4. a) Pour tout n, $a_{n+1} - a_n = \frac{0,3}{2^{n+1}} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
   b) Si la question porte sur « la probabilité que Bruna atteigne la cible au $n^{\text{ème}}$ tir » sans autre information, alors non, car a_n est toujours inférieur à $0,8$.

Solution de l'exercice 5

Partie A : le modèle d'Ehrenfest.

a) c est un compteur de temps et x compte le nombre de particules dans l'urne A.

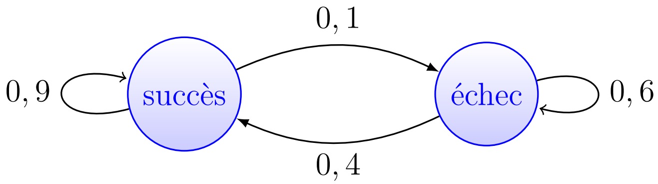


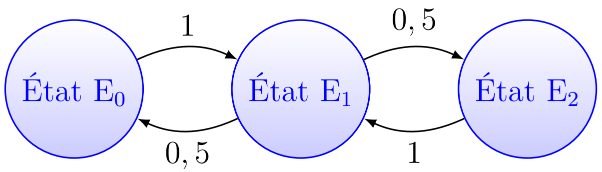
FIGURE 2. La chaîne de Markov associée à l'exercice 4.

b) avec Python.

c) c devient très grand, de sorte qu'il est improbable que le programme termine[2].

Partie B : étude du cas $\mathrm{N} = 2$**.**

1. Le graphe est le suivant :



La matrice de transition est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{État } \mathrm{E}_0 \\ \text{État } \mathrm{E}_1 \\ \text{État } \mathrm{E}_2 \end{array} .$$

A priori la distribution initiale est $\pi_0 = (1; 0; 0)$.

2. C'est vrai pour $n = 1$: $\pi_1 = \pi_0 \mathrm{P} = (0; 1; 0)$. Supposons que c'est vrai au rang $n \geqslant 2$ pair. Alors

$$\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P} = (0,5; 0; 0,5)\mathrm{P} = (0; 1; 0).$$

Supposons que c'est vrai au rang $n \geqslant 1$ impair. Alors

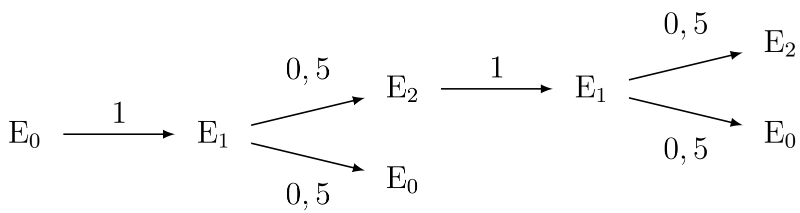
$$\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P} = (0; 1; 0)\mathrm{P} = (0,5; 0; 0,5).$$

3. Il s'agit de résoudre le système $\pi \mathrm{P} = \pi$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 0,5p_1 & = p_0 \\ p_0 + p_2 & = p_1 \\ 0,5p_1 & = p_2. \end{cases}$$

(où p_i est la probabilité de l'état E_i) sachant que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, on trouve effectivement que la distribution invariante est celle de la loi binomiale $\mathcal{B}(2; 0,5)$, soit $(1/4; 1/2; 1/4)$.

4. a) L'arbre pondéré :



Le tableau :

t	0	1	2	3	4	$\cdots$	$2n$
$\mathbf{P}(T_n = t)$	$1 - 1/2^n$	0	$1/2$	0	$1/4$	0	$1/2^n$

b) T_n est paire avec probabilité 1. Donc par définition de l'espérance

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}_n) = \sum_{k=0}^{n} 2k\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

c) Pour $n = 1$, $\mathbf{E}(\mathrm{T}_2) = 1/2 \cdot 2 = 1$. Ce qui est bien égal à $4 - 3/2^0$. Ensuite, hérédité.

d) $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(\mathrm{T}_n) = 4$. En moyenne le système revient à son état initial aprè 4 tirages.

2. Il y a une certaine analogie avec le principe de la collection des départements français aimantés proposée dans certains produits alimentaires (ou paquets de céréales, etc.). Les probabilités de transition deviennent très faibles à mesure que la collection est presque complète. Sauf que dans le cas des collections, on ne redescend pas quand on obtient un double...

Attention : on n'a pas analysé le comportement de $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(\mathrm{T}_n)$ *quand* N *devient très grand ; or c'est ce dernier qui compte dans l'interprétation physique du modèle d'Ehrenfest.*

Solution de l'exercice 6

1. a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2\times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 2\times 10^6 \\ 120 \end{smallmatrix}\right)$.

   b) Le calcul donne

$$\mathrm{U}_6 = \mathrm{A}^6\mathrm{U}_0 \simeq \begin{pmatrix} 1.29 & -5880 \\ 5.88\times 10^{-5} & -0.176 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000000 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,870\,000 \\ 96.5 \end{pmatrix}.$$

2. a) Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

   Initialisation : $\mathrm{U}_0 = \mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0$

   Récurrence : Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0 = \mathrm{P}\mathrm{D}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0$.

   b) Pour tout n entier naturel,

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,7)^n \end{pmatrix}.$$

   c) Il y a convergence vers un état stationnaire avec environ $1,867$ milion de campagnols et $93,33$ renards.

Références

[B20] Terminale option mathématiques expertes, Programme 2020, collection Barbazo, Hachette Education, 2020.

[H20] *Hyperbole*, Terminale option maths expertes, Nathan, 2020.

[L21] Le livre scolaire, Terminale maths expertes, 2021.

[M20] Magnard, Terminale option maths expertes, 2020.