TD MATH

2018-2019

IUT d'Orsay, DUT Mφ

UNIVERSITÉ PARIS SUD

Comprendre le monde, construire l'avenir®

Table des matières

Le détail des corrections données est variable. Parfois (par exemple quand la question est un calcul d'une quantité numérique) on ne donne que le résultat pour vérification, c'est-à-dire bien moins qu'au tableau pendant le TD. Merci de me signaler les erreurs par e-mail : gabriel.pallier@u-psud.fr. Dans la marge de droite, on trouve les infos « cahier de texte » et certaines questions, auxquelles je réponds quand la marge n'est pas trop petite. Les exercices non corrigés en classe sont soulignés.

Première partie

S1 : Analyse, trigonométrie, nombre complexes, équations différentielles

TD 1. Fonctions : limites, continuité, dérivabilité

I. Généralités : représentations graphiques, calculs et limites

I.1. Exercice

05/09

a. Rappeler les principales propriétés algébriques des puissances, de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme néperien.

b. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3^2+3^3}{2^4} \times \left(\frac{2^3}{3}\right)^2 \qquad B = \frac{\frac{2}{3}+1}{5} \qquad C = \frac{2^3\sqrt{2^6 3^2}}{5^3(\sqrt{2})^4}$$

$$D = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3\ln(2) - 2\ln(3) \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{5x}}\sqrt{e^{6x}}.$$

c. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers avec a le plus grand possible.

$$A = \sqrt{8} \quad B = \sqrt{27} \quad C = \sqrt{5^3 \times 2^2} \quad D = \sqrt{1800} \quad E = \sqrt{75 \times 3 \times 16}.$$

a. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y. \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = 1/e^x \tag{1'}$$

Propriétés algébriques de la fonction logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \forall y \in \mathbb{R}_+^\times, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \tag{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \ln(1/x) = -\ln x \tag{2'}$$

Propriétés algébriques des fonctions puissance :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\times, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R},\ a^{b+c} = a^b a^c \tag{3}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}. \tag{4}$$

Remarques. — (1') est une conséquence de (1) avec $y = -x$. (2') est une conséquence de (2) avec $y = 1/x$. (3) est une conséquence de (1) et de la définition de a^b, à savoir $a^b = e^{b\ln a}$ (cf. cours) . (4) est encore une conséquence de la définition, et du fait que pour tout x dans l'ensemble $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. Quand b et c sont des entiers naturels, on peut également démontrer (3) et (4) par récurrence avec la définition par produits itérés.

b. On ne donne pas les détails des calculs ; on doit trouver. $A = 16$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{48}{125}$, $D = \ln(2/3)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
Remarque. — Il est utile de maintenir les termes sous forme de puissances (ou logarithmes) le plus longtemps possible au cours du calcul. Par exemple au cours du calcul de C,

$$\sqrt{2^6 3^2} = \left(2^6 3^2\right)^{1/2} = 2^{6/2}3^{2/2} = 2^3 3 = 24,$$

tandis qu'écrire $\sqrt{2^6 3^2} = \sqrt{576}$ ne nous aide pas vraiment.

c. Pour un nombre de la forme $a\sqrt{b}$, la forme « la plus simple possible » sera celle où b est le plus petit entier possible [1]. On doit trouver $A = 2\sqrt{2}$, $B = 3\sqrt{3}$, $C = 10\sqrt{5}$, $D = 30\sqrt{2}$, $E = 60\sqrt{1}$. E est plus familièrement connu sous le nom de 60.

I.2. Exercice

> a. Simplifier : $(e^x)^5\, e^2$; $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}$.
>
> b. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
>
> c. On pose $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$. Montrer que $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}$.

a. D'après (4) et (1), pour tout x dans $\mathbb{R}$, $(e^x)^5 e^{-2} = e^{5x-2}$. D'après (1),

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}\frac{e^x}{e^x} = e^{2x} + 1.$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

c. Calculons : pour tout x dans $\mathbb{R}$,

(les parenthèses ne sont pas facultatives)

$$\frac{2f(x)}{1 + f(x)^2} = \frac{2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1 + \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}} = \frac{2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1 + \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}\frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{2(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{2(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} - 2e^x + 1}$$
$$= \frac{2}{2}\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = f(2x).$$

Commentaire : on va de l'expression la plus compliquée vers la plus simple (et pas dans l'autre sens !). Il peut être judicieux de poser $y = e^x$ afin d'alléger les calculs.

Corrigé au tableau par Paul (2017)

I.3. Exercice

> a. Soient a et b deux nombres réels tels que $-5 \leqslant a \leqslant -1$ et $2 \leqslant b \leqslant 4$. Déterminer des encadrements de $a+b$, $a-b$, ab, a^2, $\frac{a}{b}$, $(a+b)^2$ et $a^2+2ab+b^2$.
>
> b. Même question avec $-2 \leqslant a \leqslant 5$ et $-3 \leqslant b \leqslant -1$. Que peut-on dire de $\frac{1}{a}$?

a. On trouve les encadrements suivants

$$-3 \leqslant a + b \leqslant 3\ ; \quad -9 \leqslant a - b \leqslant -3\ ; \quad -20 \leqslant ab \leqslant -2\ ;$$

$$1 \leqslant a^2 \leqslant 25\ ; \quad -\frac{5}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant -\frac{1}{4}\ ; \quad 0 \leqslant (a + b)^2 \leqslant 9.$$

Observons que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. L'encadrement de $a^2 + 2ab + b^2$, à partir de chacun des termes de la somme traité séparément, donne

$$-37 \leqslant a^2 + 2ab + b^2 \leqslant 35.$$

1. Ou, ce qui revient au même, $|a|$ est le plus grand possible, b étant entier.

Ce n'est pas incompatible avec l'encadrement de $(a+b)^2$ par 0 et 9 obtenu précédemment, mais c'est netterment moins précis. Cette perte d'information vient de ce qu'on n'a pas tiré parti de la corrélation entre les différents termes de la somme.

b. Attention, ici le signe de a n'est pas toujours le même. On le traite par une disjonction de cas. Les résultats sont

$$-5 \leqslant a+b \leqslant 4; \quad -1 \leqslant a-b \leqslant 8; \quad -15 \leqslant ab \leqslant 6; \quad 4 \leqslant a^2 \leqslant 25; \quad -5 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 2.$$

Pour traiter $1/a$, disjoignons les cas :

(i) Si $-2 \leqslant a < 0$ alors $1/a \leqslant -1/2$.

(ii) Si $a = 0$ alors $1/a$ n'est pas défini.

(iii) Si $0 < a \leqslant 5$ alors $1/a \geqslant 1/5$.

Il n'y a pas d'encadrement de $1/a$ possible, on peut seulement dire que ce nombre n'appartient pas à l'ensemble $]-1/2, 1/5[$.

Remarque (suggestion de Teng Fei Xia, septembre 2017). — Pour encadrer a/b, il est commode de représenter cette quantité comme la pente de la droite passant par 0 et le point de coordonnées (b, a). Puisque le point (b, a) est astreint à se situer dans un rectangle, il s'agit d'identifier deux coins donnant des pentes extrémales, voir la figure 1 page 5 pour la résolution de la question b.

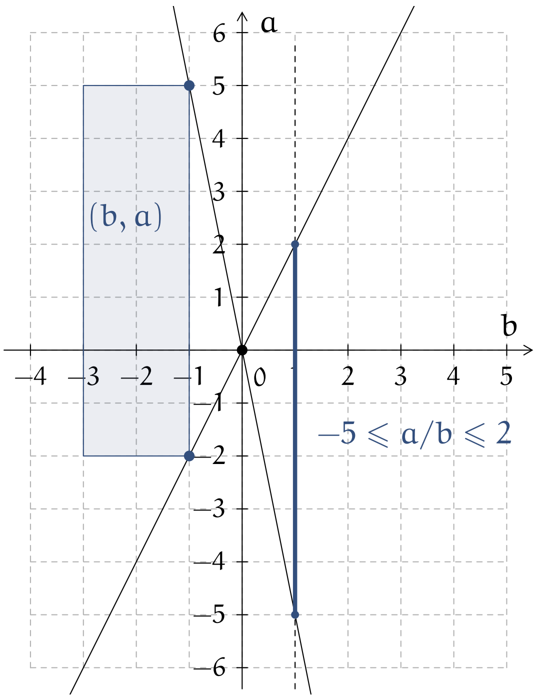
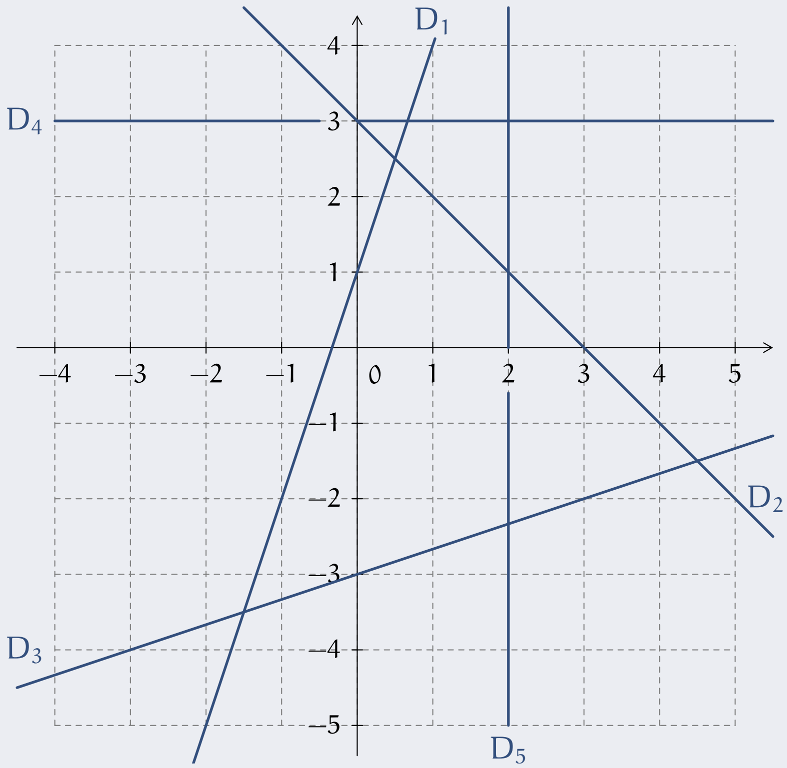


FIGURE 1 – Illustration d'une méthode « visuelle » pour l'encadrement du quotient : exemple de la question b de l'exercice I.3.

On pourra chercher des méthodes visuelles pour encadrer somme et différence (cependant elles ne présentent pas vraiment d'avantage par rapport à la méthode classique).

I.4. Exercice

Déterminer graphiquement une équation de chacune des droites représentées :



On écrit les équations de droites sous la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des entiers relatifs [2].

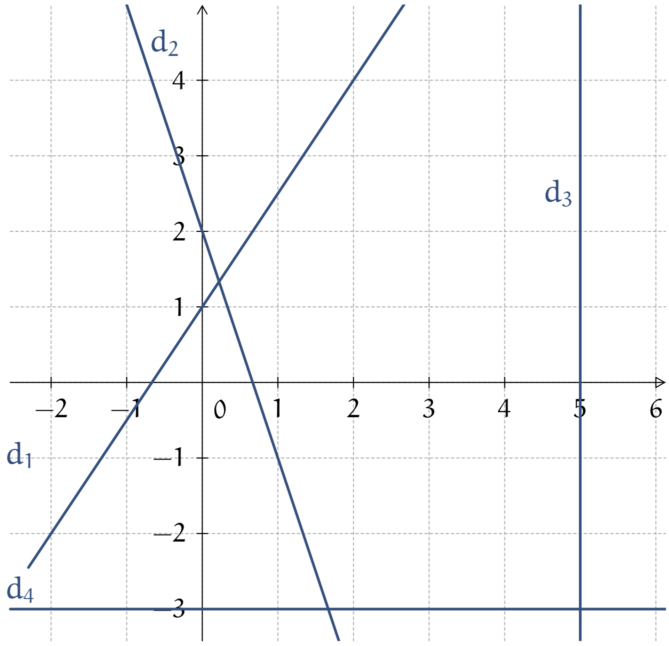
$$D_1 : y - 2x - 1 = 0$$
$$D_2 : x + y - 3 = 0$$
$$D_3 : 3y - x + 9 = 0$$
$$D_4 : y - 2 = 0$$
$$D_5 : x - 2 = 0$$

I.5. Exercice

a. Droites demandées :

2. On rappelle que l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots\}.$$



b. Le point E de coordonnées x et y est sur la droite (CD) si et seulement si les vecteurs $\vec{CE}$ et $\vec{CD}$ sont **colinéaires**, c'est-à-dire si $(x - x_C)(y_D - y_C) = (y - y_C)(x_D - x_C)$. En remplaçant par les coordonnées de C et D,

$$(CD): \; x + y - 1 = 0.$$

Méthode à retenir en vue de l'*algèbre linéaire* (2nd semestre).

I.6. Exercice : rappels sur le second degré

On considère le trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

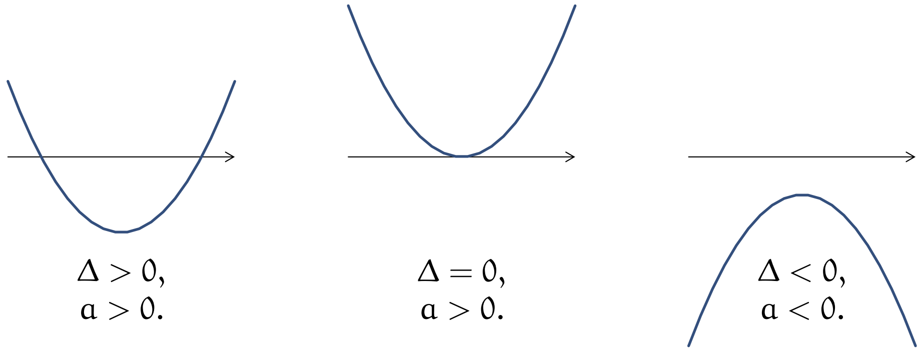
- Rappeler la formule donnant le discriminant.
- Donner en fonction du signe de Δ l'ensemble des racines réelles de P.
- Comment factorise-t-on P ?
- Tracer l'allure de P dans les cas suivants :
  - Si $\Delta > 0$ et $a > 0$
  - Si $\Delta = 0$ et $a > 0$
  - Si $\Delta < 0$ et $a < 0$.

- $\Delta = b^2 - 4ac$
- - Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réelles ; celles-ci sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  - Si $\Delta = 0$ il y a une racine réelle (dite « double »), $x_1 = -b/(2a)$.
  - Si $\Delta < 0$ l'ensemble des racines réelles est vide. Néanmoins il y a toujours des racines complexes (cf. le TD 3).
- Plusieurs méthodes :
  - Ou bien, on identifie P comme un carré (éventuellement, à une constante multiplicative près) à l'aide d'une identité remarquable. On peut arriver à cette méthode en constatant que le discriminant est nul.
  - Ou bien, on met P sous forme canonique (voir l'exercice suivant). Une factorisation est alors possible quand le discriminant est positif.

  - Ou bien, on détermine deux racines x_1 et x_2 si elles existent (voir les exercices suivants pour différentes méthodes). La forme factorisée est alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  - Si le discriminant est < 0 on ne peut pas factoriser (sur les réels).
- Allures de la courbe représentative de P dans les cas demandés



I.7. Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^2 + 28x - 35$.

a. Déterminer la forme canonique de f.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c. Etudier le signe de $f(x)$.

d. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère (vous déterminerez les coordonnées du sommet).

a. Pour trouver la forme canonique on fait apparaître le début du développement d'un carré. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 7x^2 + 28x - 35 = 7\left(x^2 + 4x - 5\right) &= 7\left([x+2]^2 - 4 - 5\right) \\ &= 7\left([x+2]^2 - 9\right) \\ &= 7\,(x+2)^2 - 63. \end{aligned} \tag{5}$$

La dernière ligne est la forme canonique.

b. D'apres (5), pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+2)^2 - 9 = 0 \\ &\iff (x+2+3)(x+2-3) \\ &\iff (x+5)(x-1) \\ &\iff \begin{cases} x &= -5, \text{ ou} \\ x &= 1 \end{cases} \\ &\iff x \in \{-5, 1\}. \end{aligned}$$

On rappelle que $\iff$ désigne l'**équivalence logique**, et se lit « si et seulement si » en français. De chaque côté du symbole $\iff$ doit figurer une formule (et non un terme) du langage. En particulier $\iff$ *ne doit pas* être utilisé pour signifier une égalité. Par exemple $2x \iff 3$ pour x réel n'a aucun sens (que ce soit au brouillon ou au propre !).

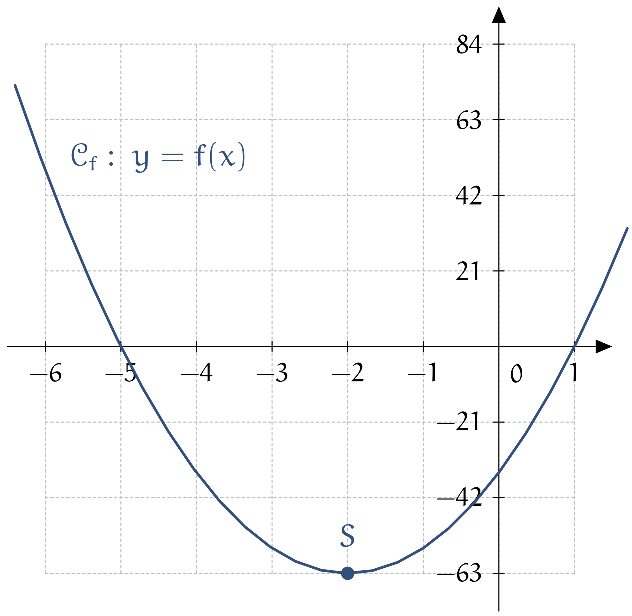
c. Dans la question précédente, on a vu que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 7(x+5)(x-1)$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
7		$+$		$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi utiliser les théorèmes généraux : le coefficient de plus haut degré 7 est positif et il y a deux racines distinctes, donc $f(x)$ est négative entre ses deux racines et positive ailleurs.

d. On a déjà montré que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 7(x+5)(x-1)$.

e. Graphe de la fonction f. Sommet $S(-2, -63)$.



I.8. Exercice

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 2x + 12$ et $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

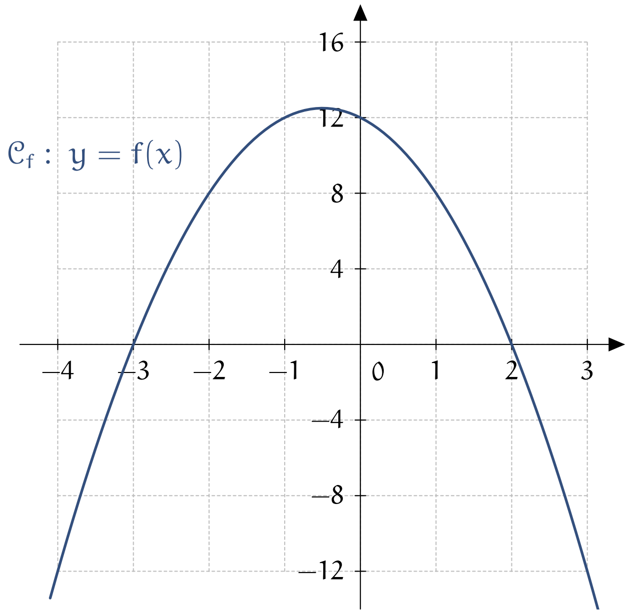
a. Déterminer les racines et le signe de $f(x)$ puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

b. Factoriser $g(x)$ (on pourra relever une racine évidente).

a. Les racines de f sont 2 et -3. Le signe est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Voici le graphe de f



b. -1 est racine évidente[3] de g. Puisque le coefficient de plus grand degré est 1, le produit des racines est le terme constant, à savoir -4. Donc les racines de g sont -1 et 4, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x+1)(x-4).$$

I.9. Exercice

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = x^2 + 6x + 9 \quad B = 4x^2 + 25 + 20x \quad C = 3x^2 - 2\sqrt{15}x + 5$$

$$D = (3x+2)(2-x) - 4(3x+2)^2.$$

Pour chacune des expressions suivantes, trouver une racine évidente et factoriser :

$$f(x) = x^2 - x - 6, \quad g(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad h(x) = 3x^2 - 5x - 2.$$

Voici les formes factorisées :

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 \\ B &= (2x+5)^2 \\ C &= 3(x - \sqrt{5/3})^2 \\ D &= (3x+2)\,[2 - x - 4(3x+2)] \\ &= (3x+2)(-6-13x). \end{aligned}$$

Une racine évidente de f est 3, et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)(x+2)$. Une racine évidente de g est 1, et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = (x-1)(3x+1)$. Une racine évidente de h est 2, et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $h(x) = (x-2)(3x+1)$.

3. On ne devrait pas interpréter trop littéralement la tournure « racine évidente » et encore moins en faire un motif de fierté personnelle. Une racine est évidente si elle a été trouvée par une méthode autre que systématique. Deux attitudes inefficaces : appliquer sans réfléchir la formule du Δ, ou perdre du temps à chercher une racine qui, quand bien même on réussirait à l'attraper, n'aurait d'évidente que le nom.

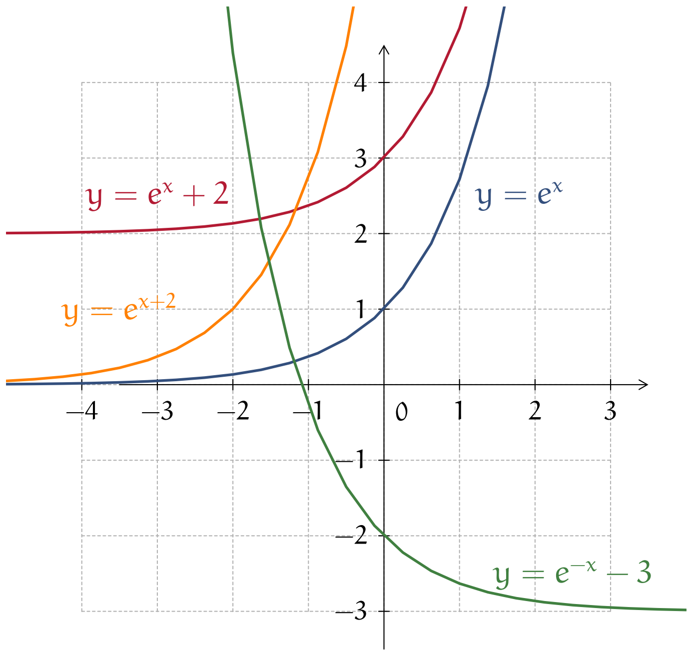
I.10. Exercice

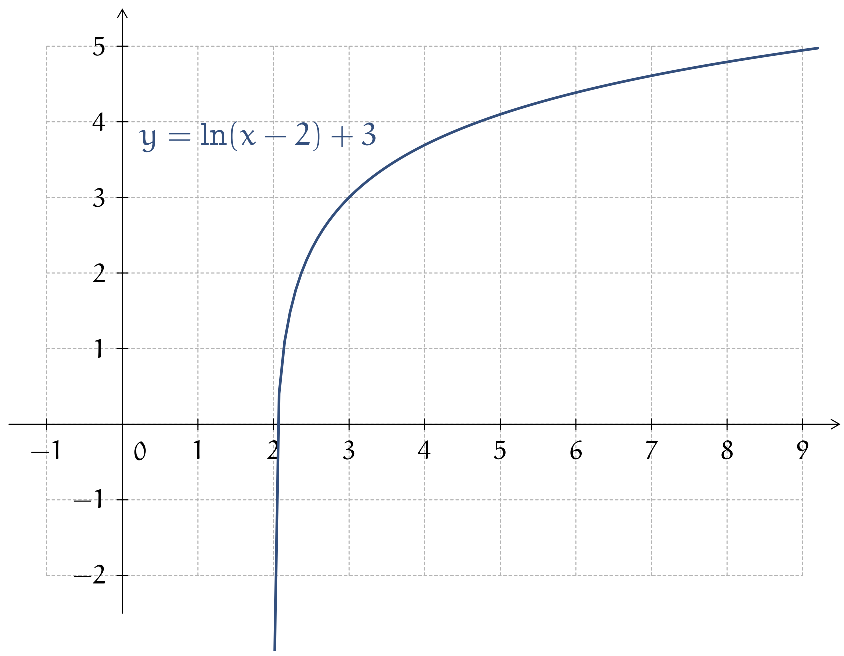
Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$$f(x) = e^x,\ f_1(x) = e^x + 2,\ f_2(x) = e^{x+2},\ f_3(x) = e^{-x} - 3.$$

Et dans un autre repère :

$$g(x) = \ln(x-2) + 3.$$

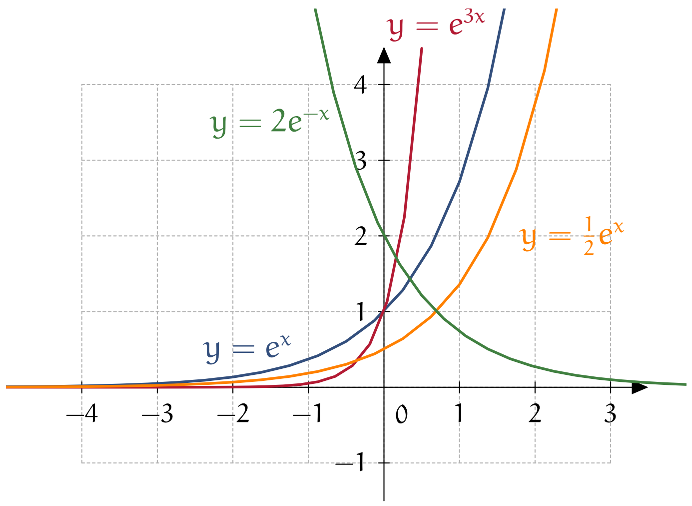




I.11. Exercice

Tracer dans un même repère les courbes des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x \quad f_1(x) = e^{3x} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}e^x \quad f_3(x) = 2e^{-x}.$$



I.12. Exercice

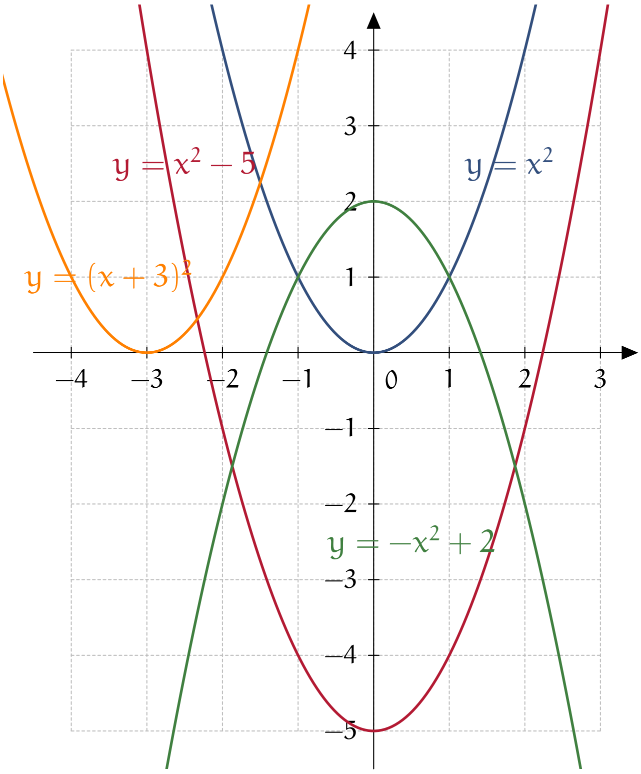
a. Tracer dans un repère les courbes des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \quad f_1(x) = x^2 - 5 \quad f_2(x) = (x+3)^2 \quad f_3(x) = -x^2 + 2.$$

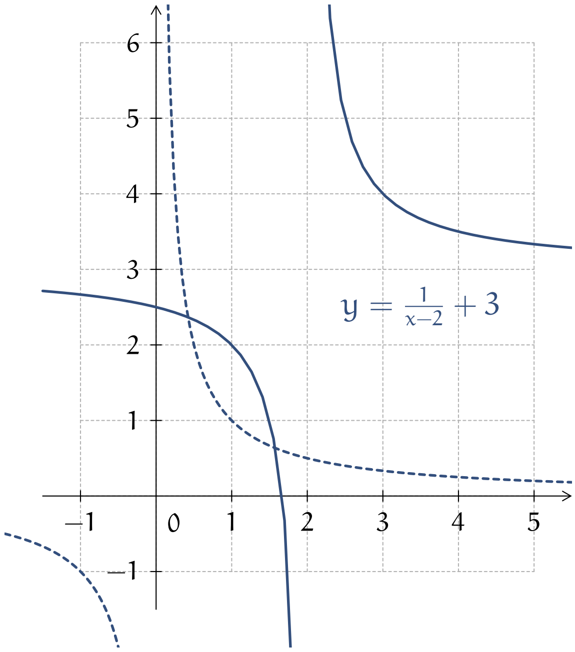
b. Tracer dans un autre repère la courbe de la fonction suivante (on partira du tracé de la courbe d'une fonction de référence) : $g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

c. Dans un autre repère la courbe de la fonction $h(x) = 3 - \ln(2x)$.

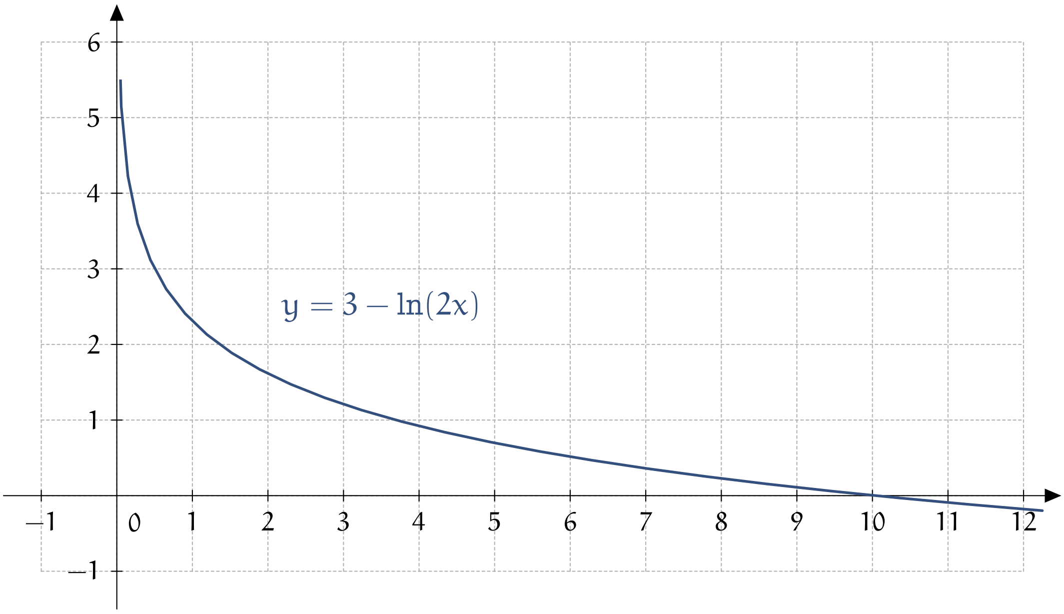
a. Courbes demandées :



b. Courbe demandée (courbe de référence $y = 1/x$ en pointillés) :



c. Courbe demandée :



I.13. Exercice

Déterminer les limites suivantes

$$\text{a. } \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x+2}{x^5-2x^2+1} \qquad \text{b. } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\text{c. } \lim_{x\to1} \frac{2x+1}{x^2+x-2} \qquad \text{d. } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+10x+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a. Quand cette quantité est bien définie (c'est le cas pour x assez grand),

$$\frac{2x^3+3x+2}{x^5-2x^2+1} = \frac{x^3}{x^5}\frac{2+3/x^2+2/x^3}{1-2/x^3+1/x^5} = x^{-2}\frac{2+3/x^2+2/x^3}{1-2/x^3+1/x^5}.$$

Quand $x \to +\infty$, le numérateur du terme de droite tend vers 2 (par somme de limites) et le dénominateur vers 1. Par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3/x^2+2/x^3}{1-2/x^3+1/x^5} = 2.$$

D'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^{-2} = 0$. Par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^5-2x^2+1} = 0.$$

b. Quand cette quantité est bien définie (c'est le cas pour x assez grand),

$$\frac{\sqrt{5x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^{3/2}}{x^{2/2}}\frac{\sqrt{5+2/x^2-1/x^3}}{\sqrt{1+2/x^2}} = x^{1/2}\frac{\sqrt{5+2/x^2-1/x^3}}{\sqrt{1+2/x^2}}.$$

Quand $x \to +\infty$, le numérateur du terme de droite tend vers $\sqrt{5}$ et le dénominateur vers $\sqrt{1}$. Par quotient puis produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+2}} = +\infty.$$

Autre méthode. – On peut également réécrire

$$\frac{\sqrt{5x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{\frac{5x^3+2x-1}{x^2+2}},$$

déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x-1}{x^2+2}$ et appliquer le théorème de composition des limites.

c. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Donc

$$\lim_{x\to1^+} \frac{2x+1}{x^2+x-2} = +\infty\,; \quad \lim_{x\to1^-} \frac{2x+1}{x^2+x-2} = -\infty.$$

La limite quand $x\to1$ n'existe pas [4].

d. On factorise encore par le terme dominant : quand x est grand,

$$\frac{\sqrt{x^2+10x+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x}\frac{\sqrt{1+10/x+1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}}.$$

Donc $\frac{\sqrt{x^2+10x+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ par quotient. Ou encore, par composition des limites et continuité de la fonction $y\mapsto\sqrt{y}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+10x+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+10x+1}{x^2+1}} = \lim_{y\to1}\sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

I.14. Exercice : démonstration du théorème des croissances comparées

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x - x$.

a. Etudier les variations de la fonction φ.

b. En déduire que pour tout $x>0$, $e^{x/2} > \frac{x}{2}$.

c. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

d. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Avertissement. — Dans cet exercice on se donne pour objectif de **démontrer** le théorème des croissances comparées. On n'a donc pas le droit de l'utiliser dans les questions a,b,c. Dans la question d seule la forme démontrée en c est autorisée.

A-t-on le droit au théorème des croissances comparées au DS ? :'(Oui !

a. Voici les variations de φ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x) = e^x - 1$		$-$		$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

La limite quand $x\to-\infty$ s'obtient par somme. Quand x est positif, le tableau de variation nous dit que $\varphi(x)$ est positif ; on a seulement besoin de cela pour la suite de l'exercice [5] .

4. Attention. Ecrire $\lim_{x\to a} f(x) = b$, c'est affirmer deux choses : que la limite existe et qu'elle est égale à b. En particulier quand a est réel, il se peut que les limites $\lim_{x\to a^+}$ et $\lim_{x\to a^-}$ existent mais ne soient pas égales, auquel cas il n'y a pas de limite en a.

5. On pourrait montrer que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ mais ce n'est pas nécessaire ici. Ce sera d'ailleurs une conséquence du théorème visé.

b. Si $x > 0$, alors $x/2 \geqslant 0$; d'après la question précédente $\varphi(x/2) \geqslant 0$, autrement dit $e^{x/2} \geqslant x/2$.

c. On observe que $e^x = e^{x/2}e^{x/2}$; d'après la question précédente (et la croissance de la fonction $y \mapsto y^2$ sur $[0, +\infty[$), on en déduit que

$$\forall x > 0,\ e^x \geqslant (x/2)^2 = x^2/4.$$

En particulier, $e^x/x \geqslant x^2/(4x) = x/4$. Or $\lim_{x\to+\infty} x/4 = +\infty$. Par encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

d. D'après la question précédente, par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x/2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1/2)\cdot e^{x/2}}{x/2} = +\infty, \tag{6}$$

par produit. Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{x/2}}{x}\frac{e^{x/2}}{x}.$$

D'après (6) et par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

I.15. Exercice

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln(x)}{e^x}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3x + 5\ln(x) - e^x$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln(x)}{x+\sin(x)}$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\sin(x))\sin^2(x)$ e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+1}{5x\ln(x)+2\ln(x)}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-3x}+e^{-x}}{e^{-2x}+3e^{-x}}$

a. Distribuons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x+\ln x}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}.$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$. Par composition des limites, on a aussi que $\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{e^y}$. Or

$$\frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x}\frac{x}{e^x}.$$

Ces deux facteurs étant de limite nulle en $+\infty$, leur produit l'est également. Finalement par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{e^x} = 0.$$

Remarque. — Dans la suite, on invoquera directement les croissances comparées pour justifier que $\lim_{x\to+\infty} \ln x/x = 0$.

b. On factorise par le terme dominant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, x^2 + 3x + 5\ln x - e^x = e^x \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{3x}{e^x} + \frac{5\ln x}{e^x} - 1 \right).$$

Par croissances comparées, le facteur entre parenthèse a pour limite -1. Par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 5\ln x - e^x = -\infty.$$

c. D'après les prérequis sur les fonctions usuelles, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin x \leqslant 1. \tag{7}$$

Quand x est assez grand, $x + \ln x$ est positif, donc d'après (7) et en distribuant,

$$\frac{x}{x+1} + \frac{\ln x}{x+1} \leqslant \frac{x+\ln x}{x+\sin x} \leqslant \frac{x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}.$$

Or $\frac{\ln x}{x\pm1} = \frac{\ln x}{x}\frac{x}{x-1}$; d'après le théorème des croissances comparées et par produit, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x\pm1} = 0 \times 1 = 0$. Par somme, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\pm1} + \frac{\ln x}{x\pm1} = 1$. Nous avons encadré $\frac{x+\ln x}{x+\sin x}$ entre deux fonctions de limite 1 ; d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x+\sin x} = 1.$$

NB (autre méthode) : En factorisant par le terme que l'on espère dominant (à savoir x), on peut également écrire, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x+\ln x}{x+\sin x} = \frac{x}{x}\frac{1+\ln x/x}{1+\sin x/x}.$$

Cette méthode est un peu plus directe. Quoi qu'il en soit, on doit invoquer le théorème des croissances comparées pour traiter le numérateur, et le théorème d'encadrement pour le dénominateur.

d. Commençons par montrer que

$$\lim_{y\to0^+} y^2 \ln y = 0. \tag{8}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée a priori, mais si l'on pose $t = \ln y$, alors c'est encore $\lim_{t\to-\infty} te^{2t}$, soit encore si l'on pose $t = -s$, $\lim_{s\to+\infty}(-s)/e^s$. D'après le théorème des croissances comparées cette limite est nulle ; nous avons donc montré (8). Finalement, $\lim_{x\to0^+} \sin x = 0^+$; par composition,

$$\lim_{x\to0^+} \ln(\sin(x))\sin^2(x) = \lim_{y\to0^+} y^2 \ln y \overset{(8)}{=} 0.$$

e. Factorisons numérateur et dénominateur par le terme dominant :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{3xe^x+1}{5x\ln x + 2\ln x} &= \frac{3xe^x(1+e^{-x}/(3x))}{3xe^x(5(\ln x)e^{-x} + 2(\ln x)e^{-x}/x)} \\ &= \frac{1+e^{-x}/(3x)}{5(\ln x)e^{-x} + 2(\ln x)e^{-x}/x}.\end{aligned}$$

Le numérateur a pour limite 1 et le dénominateur 0. Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3xe^x+1}{5x\ln x + 2\ln x} = +\infty.$$

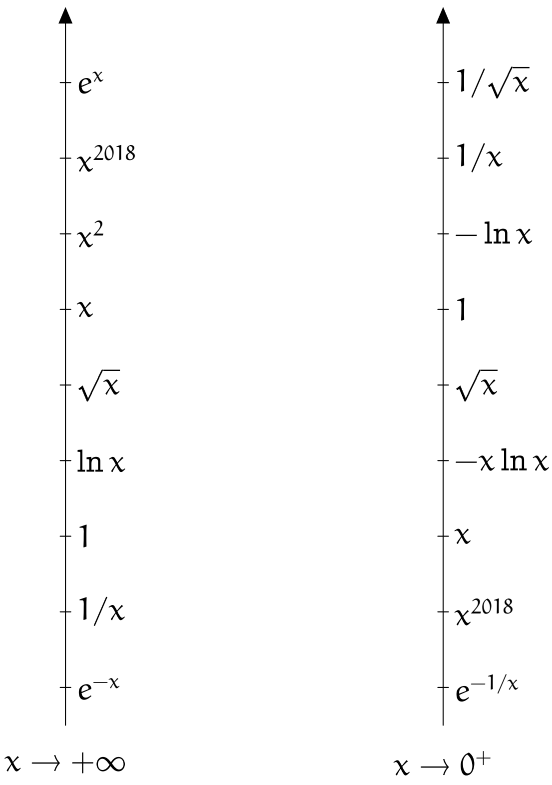


FIGURE 2 – Schéma récapitulatif des termes dominants en $+\infty$ et 0^+. $f(x)$ sera dominant par rapport à $g(x)$ quand $x \to \ell$ s'il est situé plus haut suivant la flèche. Cela signifie $\lim_{x\to\ell} f(x)/g(x) = +\infty$. La plupart des comparaisons présentes ici sont des conséquences plus ou moins directes du théorème des croissances comparées.

f. Attention, le terme dominant ici est e^{-x} (en haut) et $3e^{-x}$ en bas car $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-3x}+e^{-x}}{e^{-2x}+3e^{-x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{3e^{-x}} \frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-x}/3} \\ &= 1/3. \end{aligned}$$

II. Continuité et dérivabilité

II.1. Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

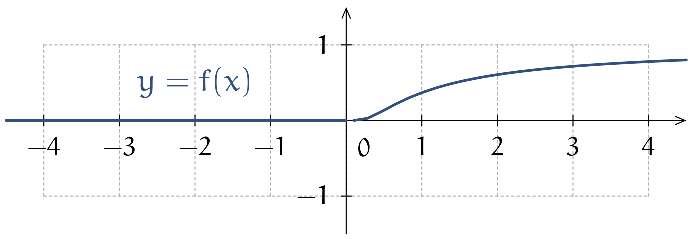
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

f est constante, donc continue, sur l'intervalle $]0, +\infty]$. D'autre part, $x \mapsto -1/x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, et $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ par composition. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les limites $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existent [6] et sont égales. Déjà, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Ensuite, par composition des limites,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Nous avons ainsi vérifié que f est continue sur $\mathbb{R}$. Voici l'allure de sa courbe représentative :



Attention. — Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cup J = \mathbb{R}$. A priori, il ne suffit pas de vérifier que $f_{|I}$ est continue sur I et que $f_{|J}$ est continue sur J pour savoir que f est continue sur $\mathbb{R}$. Toutefois, si I et J sont ouverts, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ dès que ses restrictions à I et J sont continues. Voir aussi l'avertissement page 29.

II.2. Exercice

Soit f la fonction définie pr $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(2x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ \ln(1+x) + 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

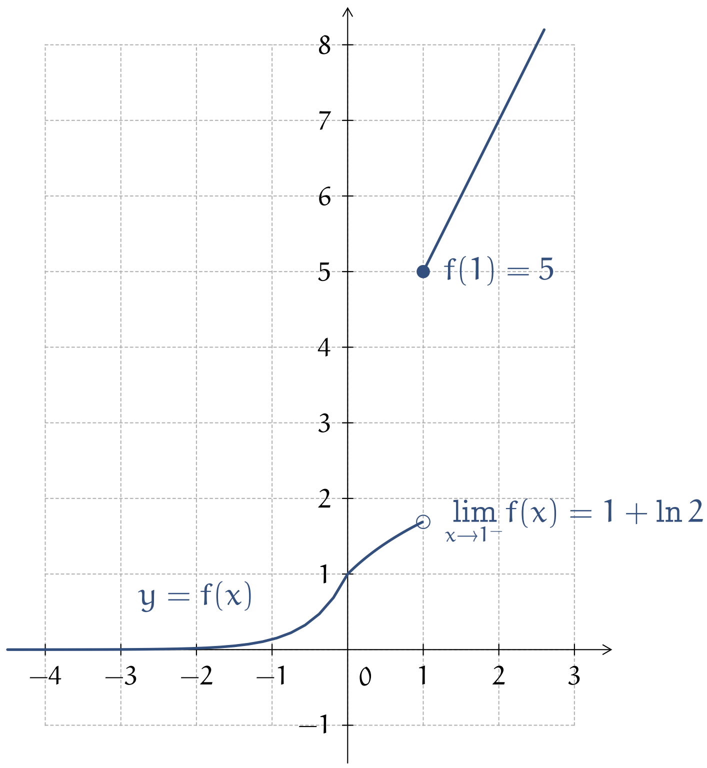
f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

On adopte la même méthode que dans l'exercice précédent. Par somme et composition, f est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$. Or

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \text{ mais } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + \ln 2 \neq 5.$$

Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. C'est visible sur la courbe représentative :

6. On sait déjà que la limite quand $x \to 0^-$ existe par définition de la continuité.

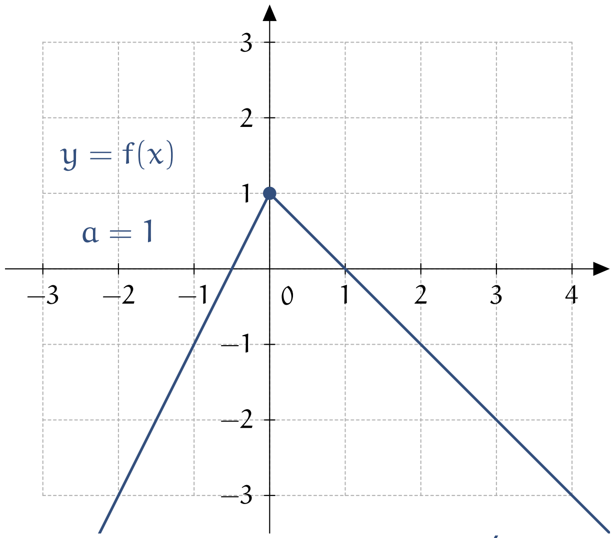


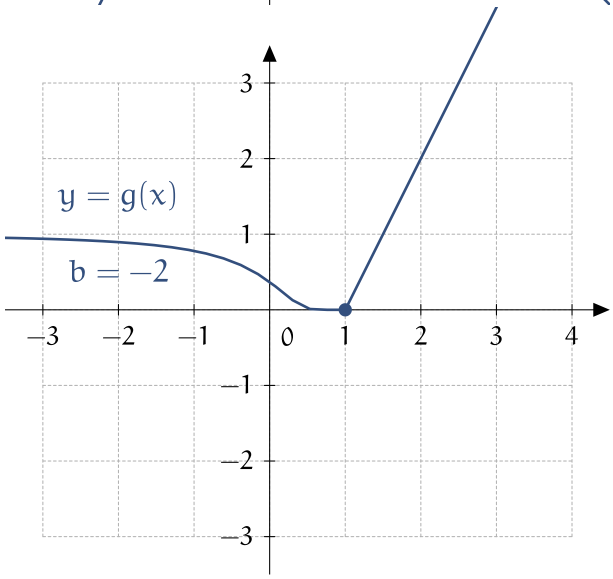
II.3. Exercice

Déterminer les réel a et b afin que les fonctions suivantes soient continues sur $\mathbb{R}$ (vous tracerez leur graphique)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -x+a & \text{si } 0 < x \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) & \text{si } x < 1 \\ 2x+b & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$; pour que f soit continue en 0, il faut et il suffit que $\lim_{x\to 0^+ f(x)} = f(0) = 1$. C'est le cas si et seulement si $a = 1$. De même, g est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $2 + b = \lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) = 0$, c'est-à-dire $b = -2$.



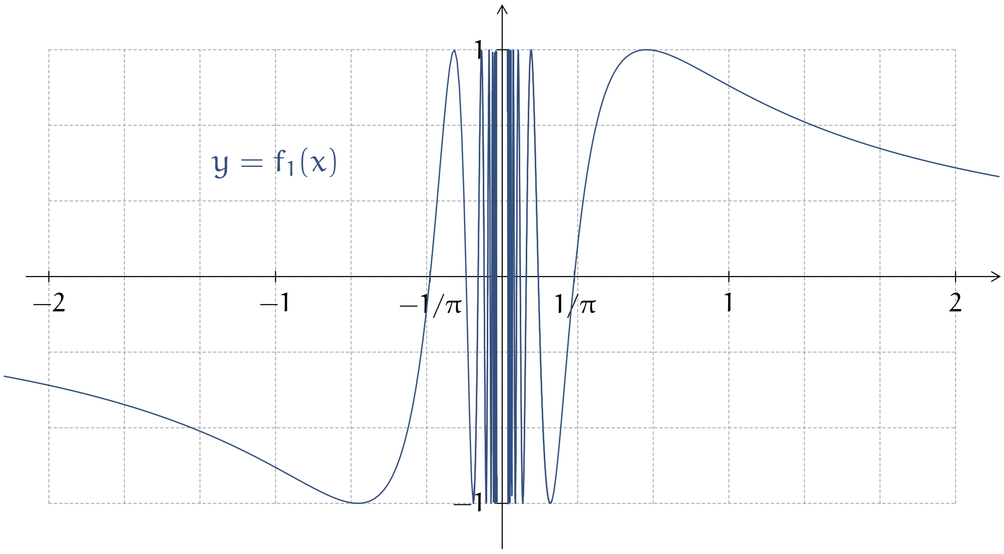


II.4. Exercice

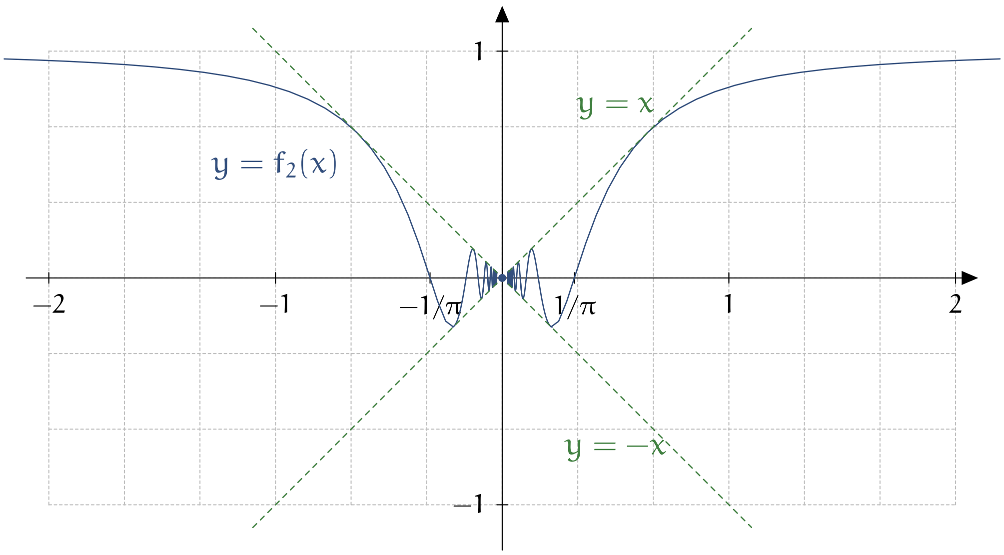
Etudier la continuité et la dérivabilité des trois fonctions suivantes (vous commencerez par tracer leur graphique) :

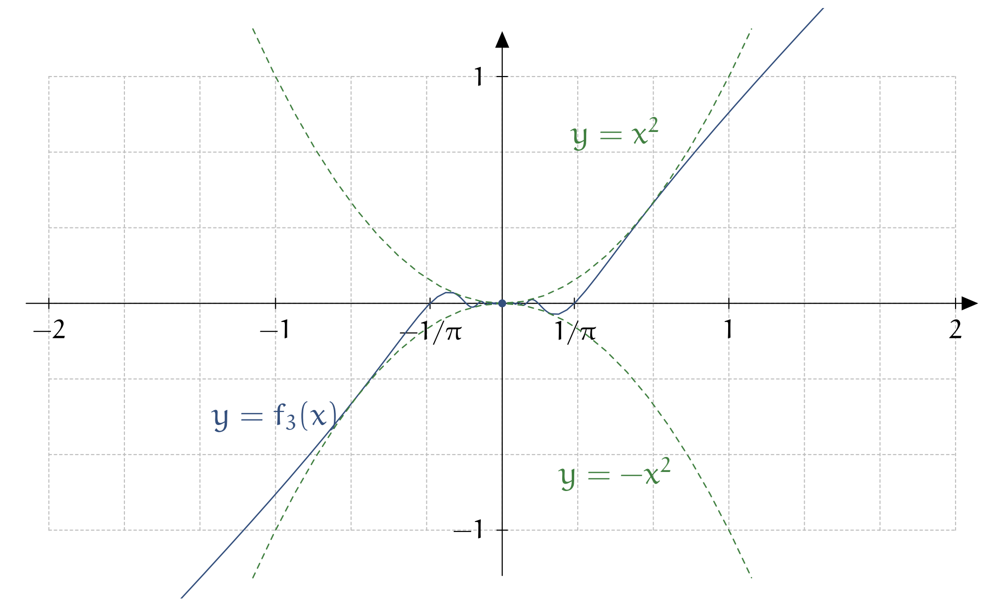
$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont continues et dérivables sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par produit et composition. On ne s'intéresse donc à la continuité et la dérivabilité qu'en 0.



Le vide apparent au milieu du graphe de f_1 est un artefact.





Voici un tableau récapitulatif :

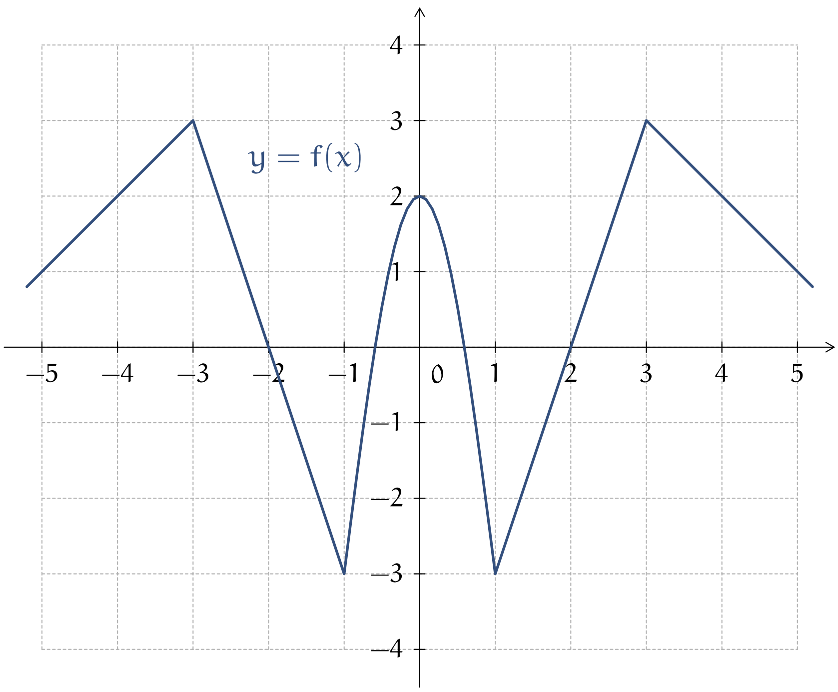
f	continue sur $\mathbb{R}$	dérivable sur $\mathbb{R}$
f_1	non	non
f_2	oui	non
f_3	oui	oui

Tableau à mettre en lien avec le tableau des prérequis en bas de la page 10 du TD.

II.5. Exercice

Tracer dans un repère la courbe d'une fonction f vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- $f'(2) = 3$,
- $f'(4) = -1$,
- f est une fonction paire, et
- f n'est pas dérivable en 1.



II.6. Exercice

Ecrire chacune des fonctions suivantes comme composée de fonctions de référence :

$$f_1(x) = \sin(x^2),\ f_2(x) = \frac{1}{(2x+1)^3},\ f_3(x) = \ln(3e^x + 2).$$

$f_1 = u \circ v$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = x^2$.
$f_2 = u \circ v \circ w$ avec $u(x) = 1/x$, $v(x) = x^3$ et $w(x) = 2x + 1$.
$f_3 = u \circ v \circ w$, avec $u(x) = \ln x$, $v(x) = 3x + 2$ et $x(x) = e^x$.

Remarque. — Pour nous, toute fonction affine est une fonction de référence (même si on pourrait encore l'écrire comme une composée d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ et d'une translation $x \mapsto x + b$.).

II.7. Exercice

a. Rappeler la formule de dérivation des fonctions composées.

b. Dériver les fonctions suivantes sans souci de l'intervalle de dérivabilité :

$f_1(x) = e^{5x+2}$	$f_2(x) = \sin(\cos(x))$	$f_3(x) = \sin(e^x)$
$f_4(t) = \sin(e^{5t})$	$f_5(x) = \ln(\cos(x))$	$f_6(v) = \cos(\ln(v))$
$f_7(x) = \cos^3(x)$	$f_8(\theta) = \sqrt{3\theta+1}$	$f_9(x) = \cos(\ln(\sin(x)))$
$f_{10}(x) = e^{2\ln(5e^{2x}+3)}$	$f_{11}(x) = \ln(3x)e^{7\cos(2x)}$	$f_{12}(x) = \sin\left(e^{\cos(\ln(5x^3))}\right)$.

a. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que f et g sont dérivables sur I et J respectivement, et $g(J) \subset I$. Alors $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable, et pour tout $x \in J$,
$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x).$$

b.
$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 5e^{5x+2} \\ f_2'(x) &= -\cos(\cos(x))\sin(x) \\ f_3'(x) &= e^x \cos(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4'(t) &= 5e^{5t}\cos(e^{5t}) \\ f_5'(x) &= -\sin(x)/\cos(x) \\ &= -\tan(x) \\ f_6'(v) &= -\frac{\sin(\ln v)}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7'(x) &= -3\cos^2(x)\sin(x) \\ f_8'(\theta) &= \frac{3}{\sqrt{3\theta+1}} \\ f_9'(x) &= -\sin(\ln(\sin(x)))\frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{-\sin(\ln(\sin(x)))}{\tan x} \end{aligned}$$

Nous n'utiliserons pas les fonctions trigonométriques sec, csc, ni même cot.

Pour dériver f_{10} il peut être commode de la réécrire sous la forme $f_{10}(x) = (5e^{2x}+3)^2$. Alors
$$f_{10}'(x) = 20e^{2x}(5e^{2x}+3) = 20e^{2x+\ln(5e^{2x}+3)}.$$

Pour dériver f_{11}, écrivons-la sous la forme d'un produit :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, f_{11}(x) = g_{11}(x)h_{11}(x),$$

avec $g_{11}(x) = \ln(3x)$ et $h_{11}(x) = e^{7\cos(2x)}$.

Alors $g_{11}'(x) = 1/x$, et $h_{11}'(x) = -14\sin(2x)e^{7\cos(2x)}$, donc

$$f_{11}'(x) = g_{11}(x)h_{11}'(x) + g_{11}'(x)h_{11}(x) = \left(-14\sin(2x)\ln(3x) + \frac{1}{x}\right) e^{7\cos(2x)}.$$

Pourquoi la dérivée de $\ln(5x^3)$ *est-elle* $3/x$ *?* pour $x > 0$, $\ln(5x^3) = \ln 5 + 3\ln x$. Quand on dérive, $\ln 5$ s'en va.

Enfin, pour dériver f_{12}, on itère la formule de dérivation d'une composée :

$$f_{12}'(x) = \cos\left(e^{\cos(\ln(5x^3))}\right) \cdot \left(-\sin(\ln(5x^3)) \cdot \frac{3}{x}\right) e^{\cos(\ln(5x^3))}.$$

II.8. Exercice*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
a. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

b. La réciproque est-elle vraie ?
Reprendre cet exercice en remplaçant le terme « paire » par « impaire » et vice versa.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^\times$, étant donné que f est paire,

$$\frac{f(-x+h)}{h} = \frac{f(x-h)}{h} = -\frac{f(x+(-h))}{-h}. \tag{9}$$

Or, $\lim_{h\to 0}(-h) = 0$. Nous savons que f est dérivable en x, de dérivée $f(x)$. Par composition des limites,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)}{h}$$

existe, et est égale d'après (9) à $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+(-h))}{-h} = f'(x)$. Nous avons montré que f' est impaire.

b. Répondre à cette question nous amènerait trop loin ;).

c. A partir d'ici, les termes « paire » et « impaire » sont échangés. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^\times$, étant donné que f est impaire,

$$\frac{f(-x+h)}{h} = -\frac{f(x-h)}{h} = \frac{f(x+(-h))}{-h}. \tag{10}$$

Or, $\lim_{h\to 0}(-h) = 0$. Nous savons que f est dérivable en x, de dérivée $f(x)$. Par composition des limites,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)}{h}$$

existe, et est égale d'après (10) à $-\lim_{h\to 0} \frac{f(x+(-h))}{-h} = -f'(x)$. Nous avons montré que f' est paire.

d. Non. Par exemple si $f(x) = x+1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$; donc f' est paire, mais f n'est pas impaire.

III. Etudes de fonctions

Exercice : Etude de la fonction tangente

> On définit la fonction tangente par : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
>
> a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
>
> b. Montrer que la fonction tangent est π-périodique.
>
> c. Etudier la parité de la fonction tangente.
>
> d. Déterminer la dérivée de la fonction tangente.
>
> e. Déterminer une équation de la tangente à la fonction tangente au point d'abscisse 0.
>
> f. Dresser le tableau de variation de cette fonction sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}[$ (vous déterminerez les limites aux bornes de l'intervalle) puis tracer la représentation graphique de la fonction tangente.

a. $\tan(x)$ est définie tant que $\cos(x)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que x n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$, $x + \pi \in \mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x),$$

donc tan est π-périodique. On peut montrer que π est bien la plus petite période (ce sera une conséquence des questions suivantes).

c. Par la formule de dérivée d'un quotient, tan est dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \tag{11}$$

Tout comme les oeufs, l'équation (11) se cuisine de plusieurs manières : soit on utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour simplifier le numérateur, soit on développe et on ré-exprime $\sin^2(x)/\cos^2(x)$ à l'aide de $\tan(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x). \tag{12}$$

d. D'après la question précédente, la fonction tan est dérivable en 0 et $\tan'(0) = 1$. Par ailleurs $\tan(0) = 0$, donc si T est[7] la tangente de tan en 0, alors une équation de T est

$$T : y - x = 0.$$

T est figurée (en vert, pointillés) sur le graphe de la fonction tan à la suite de cet exercice.

e. Par quotient,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} = -\infty.$$

De plus, $\tan'$ est strictement positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$ d'après (12), donc tan est strictement croissante sur cet intervalle. Voir le tableau 1 de variations.

x	$-\pi/2$		0		$+\pi/2$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$		$+$	1	$+$	
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

TABLE 1 – Tableau de variations pour la fonction tan sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

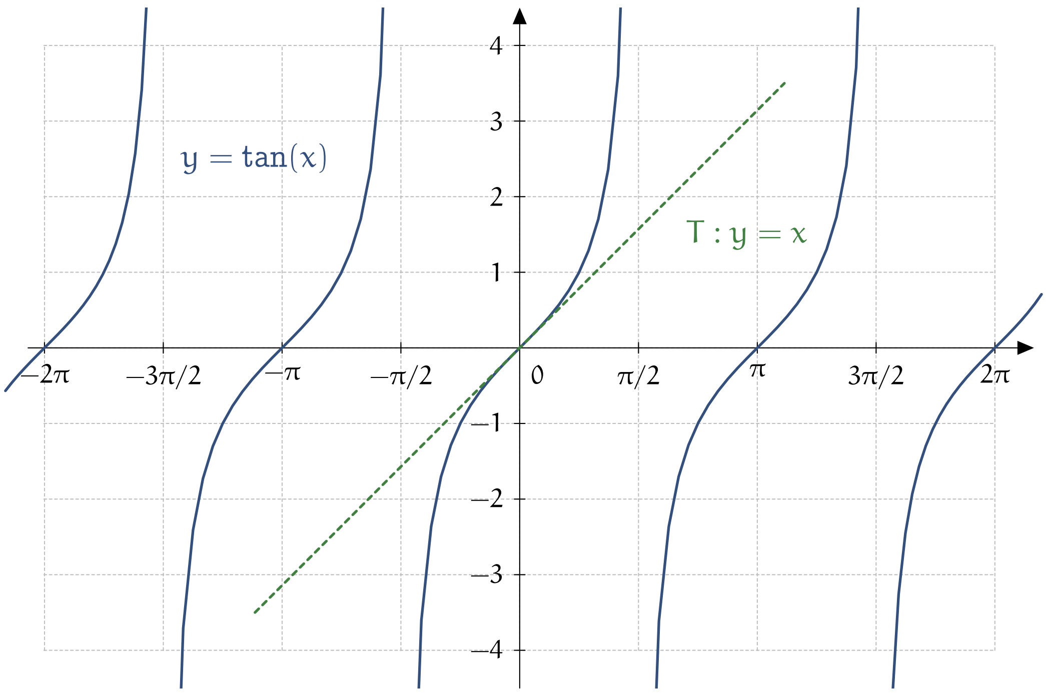


FIGURE 3 – Graphe de la fonction tan et tangente de la tangente à l'origine.

Remarque. — On justifie a posteriori que π est la plus petite période de tan : cette fonction restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ qui est de longueur π, est injective.

IV. Notion de bijection

IV.1. Exercice

1. Les applications de E dans F suivantes sont-elles surjectives, injectives, bijectives ? Vous pourrez entre autre utiliser le théorème de la bijection vu en cours afin de justifier vos réponses.

fonction	E	F
$f_1(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$\mathbb{R}$
$f_2(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$[0; +\infty[$
$f_3(x) = \sqrt{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty[$
$f_4(x) = \sqrt{x^2+1}$	$]-\infty; 0]$	$[0; +\infty[$
$f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}_+$	$]0, 1]$
$f_6(x) = \sin(x^2)$	$\left[0; \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$	$[0, 1]$

2. Comment montrer qu'il y a exactement autant de nombres réels que de réels dans l'intervalle $]0; 1[$?

a. (f_1) Si x et y dans $\mathbb{R}_+^\times$ sont tels que $x < y$, alors

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0,$$

donc $\sqrt{y} > \sqrt{x}$. De plus dès que $x > 0$, $\sqrt{x} > 0 = \sqrt{0}$. Nous avons ainsi montré que f_1 est strictement croissante sur $E = [0, +\infty[$ (on aurait aussi pu la dériver). De plus, f_1 est continue sur E, qui est un intervalle. D'après le théorème de la bijection (cours page 12), f_1 réalise une bijection de E sur $f(E) = [0, +\infty[$. En particulier :
— $f_1 : E \to F$ est injective.
— $f_1 : E \to F$ n'est pas surjective (-1 n'est pas atteint).
— $f_1 : E \to F$ n'est pas bijective. 03/10

(f_2) Comme montré à la question précédente, $f_2 : E \to F$ est bijective. En particulier f_2 est injective et surjective. — 06 /10

(f_3) f_3 n'est pas injective : $-2 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$, $f_3(-2) = \sqrt{5}$ et $f_3(2) = \sqrt{5}$; or $2 \neq -2$. f_3 n'est pas surjective : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{1} = 1.$$

En particulier l'élément $0 \in F$ n'est pas atteint. A fortiori, f_3 n'est pas bijective.

(f_4) f_4 est strictement décroissante (par composition) sur E, et continue (par composition) sur E. De plus E est un intervalle, donc d'après le théorème de la bijection, f_4 réalise une bijection de E sur $f(E)$. Or $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = +\infty$, et $f(0) = 1$, donc $f(E)$ est un intervalle (cours page 12) dont le plus petit élément est égal à 1 et non majoré, c'est-à-dire $f(E) = [1, +\infty[$. Nous avons ainsi montré que $f_4 : E \to F$ est une bijection.

7. Mais pourquoi donc sin / cos s'appelle-t-elle « tangente » ? Réponse au TD2...

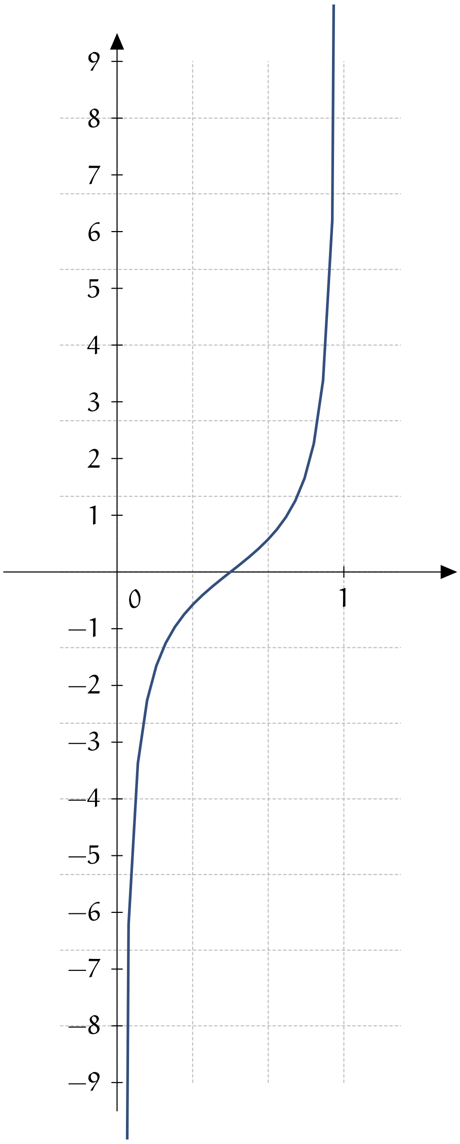


FIGURE 4 – Graphe de la fonction $x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ sur l'intervalle $]0, 1[$. Cette fonction réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

(f_5) Le même raisonnement que dans la question précédente s'applique, pour nous dire que $f_5 : E \to F$ est une bijection.

(f_6) f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$; calculons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x) = 2x\cos(x^2).$$

En particulier, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$, donc f est strictement croissante sur E. De plus f_6 est continue, et E est un intervalle. On conclut comme précédemment que f_6 est une bijection de E sur $[0, 1] = [f_6(0), f_6(\sqrt{2\pi}/2)]$.

b. La fonction $]0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$ (voir la figure 4 occupant la page 29), ainsi qu'on le montre par exemple à l'aide du théorème de la bijection.

Attention (Vu sur les copies). — Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une fonction. On suppose que E se décompose sous la forme $E = E_1 \cup E_2$. Il est incorrect que si f est injective de E_1 vers F et f est injective de E_2 vers F, alors f est injective de E vers F. Contre-exemple : $f : \{0, 1\} \to \{0\}$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Voir aussi l'avertissement page 19.

TD 2. Trigonométrie

I. Rappels de trigonométrie

I.1. Exercice

Montrez sans vous soucier du domaine de définition que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
En déduire une formule analogue pour $\tan(a-b)$.

Sans souci des domaines de définition,

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1-(\tan a)(\tan b)},\end{aligned} \tag{13}$$

où l'on a divisé numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$. En utilisant l'identité $a - b = a + (-b)$, (13) et le fait que tan est impaire (car sin est impaire et cos est paire), on obtient

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+(\tan a)(\tan b)}. \tag{14}$$

Quand a et b sont tous deux très petits, (13) et (14) nous disent quelque chose d'agréable : $\tan(a+b) \approx \tan(a)+\tan(b)$ et $\tan(a-b) \approx \tan(a)-\tan(b)$.

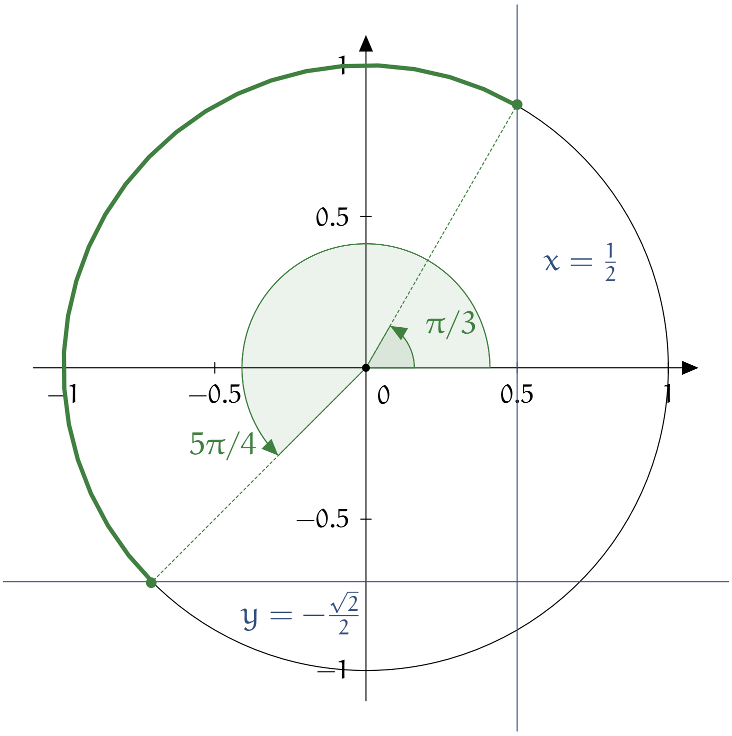
Remarque. – Ceci cautionne les calculs effectués sous l'approximation de Gauss (ou paraxiale) en optique géométrique. Une justification fréquemment donnée pour celle-ci est que $\tan'(0) = 1$ donc $\tan(x) \approx x$ quand x est petit, mais ce n'est qu'à moitié satisfaisant. On vérifiera par exemple que l'approximation de $\tan(0.1-0.099)$ par $\tan(0.1)-\tan(0.099)$ est correcte à 1% près (notre calcul le dit) tandis que l'appoximation de $\ln(1.1-0.99)$ par $\ln(1.1)-\ln(1.099)$ affiche une erreur relative de 9.9% - c'est beaucoup. Le « $\approx$ » dans $\tan(x) \approx x$ est bien meilleur que le « $\approx$ » dans $\ln(1+x) \approx x$; mais il faudra attendre le TD sur les développements limités pour donner un sens précis à cette phrase.

I.2. Exercice

Réoudre sur $[0; 2\pi[$ puis sur $[-\pi; \pi[$ puis sur $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases}\cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \\ \sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

On trace le cercle trigonométrique :



Sur $[0, 2\pi[$, x est solution si $\pi/3 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$, autrement dit

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in [0, 2\pi] : \begin{cases} \cos(x) \leqslant 1/2 \\ \sin(x) \geqslant -\sqrt{2}/2 \end{cases} \right\} = [\pi/3,\ 5\pi/4].$$

Sur $[-\pi, \pi[$, x est solution si $x \in [-\pi, -3\pi/4] \cup [\pi/3, \pi[$. Finalement sur $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{S} = \left\{ \theta + 2k\pi : \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right],\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

I.3. Exercice

La relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout x est une forme du théorème de Pythagore, si les sin et cos sont définis à partir d'un triangle rectangle (comme au collège).

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$ dans chacun des cas suivants :
   a. $\cos(x) = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
   b. $\cos(x) = \frac{1}{3}$ et $x \in [-\pi; 0[$.
2. Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$ dans chacun des cas suivants :
   a. $\sin(x) = \frac{4}{5}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
   b. $\sin(x) = \frac{4}{5}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. $\sin(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
   b. $\sin(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2. a. $\cos(x) = -\frac{3}{5}$.
   b. $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

I.4. Exercice

Sachant que $\cos(x) = \frac{1}{4}$ et $x \in [0; \pi/2[$, calculer $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Puisque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2x \in [0, \pi[$ et donc $\sin(2x) \geqslant 0$. De plus,

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = -\frac{7}{8}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(2x)\cos(\pi/3) - \sin(2x)\sin(\pi/3) \\ &= -\frac{7}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) \\ &= -\frac{7}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-(7/8)^2},\end{aligned}$$

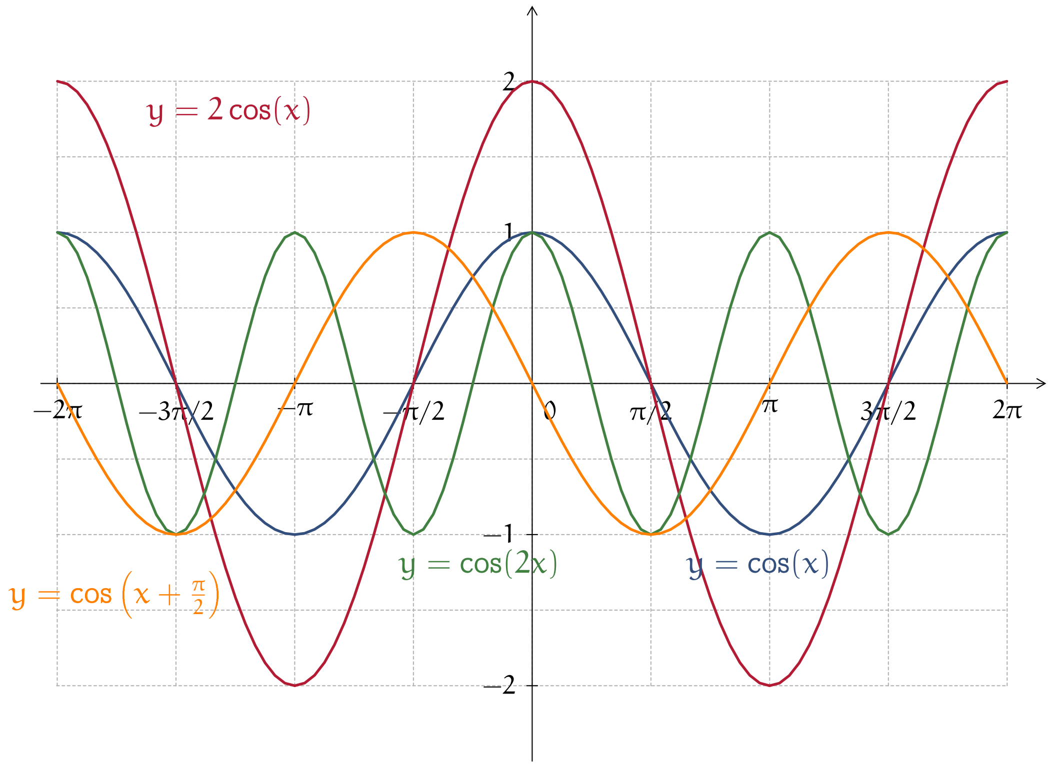
où l'on a utilisé la positivité de $\sin(2x)$ à la dernière ligne. Finalement,

$$\cos(2x + \pi/3) = -\frac{7}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{15}{64}} = -\frac{7+3\sqrt{5}}{16}.$$

I.5. Exercice

Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos(x),\ f_1(x) = 2\cos(x),\ f_2(x) = \cos(2x),\ f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$



I.6. Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes (vous indiquerez combien il y a de solutions et le nombre de points du cercle trigonométrique nécessaires pour les représenter) :

a. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

b. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

c. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$

d. $\tan(3x)=1$

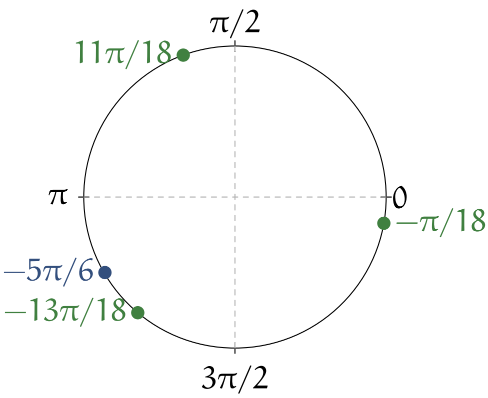
e. $\sin(2x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)$.

Pourquoi un nombre fini de points sur le cercle trigonométrique ? Quand $\mathbb{R}$ s'enroule autour du cercle trigonométrique, plusieurs solutions se recouvrent au même point.

a. D'après le cours, pour tous nombres réels a et b, $\cos(a)=\cos(b)$ si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=b+2k\pi$ **ou** $a=-b+2k\pi$. Ici donc

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases}2x+\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi, & \text{ou}\\ 2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}-x+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases}x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, & \text{ou}\\ 3x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases}x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, & \text{ou}\\ x=-\frac{\pi}{18}+2k\pi/3.\end{cases}\end{aligned}$$

Il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, représentées par 4 points sur le cercle trigonométrique :



$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{18}+2k\pi/3 : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b. D'après le cours, pour tous nombres réels a et b, $\sin(a)=\sin(b)$ si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=b+2k\pi$ ou $a=\pi-b+2k\pi$. Ici donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases}x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi, & \text{ou}\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 2x=\pi+2k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{aligned}$$

On n'a retenu que la seconde ligne dans (15) car la première ne donne aucune solution. Il y a 2 solutions sur le cercle trigonométrique.

c. Plusieurs méthodes : ou bien on utilise que $\sin(x-\pi/3) = \cos(x-\pi/3-\pi/2)$, ou bien que $\cos(2x) = \sin(2x+\pi/2)$. Appliquons la seconde méthode.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) &\iff \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin(2x+\pi/2)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} x-\frac{\pi}{3} = 2x+\pi/2+2k\pi, \text{ ou}\\ x-\frac{\pi}{3} = \pi-2x-\pi/2+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} -x = 5\pi/6+2k\pi, \text{ ou}\\ 3x = 5\pi/6+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} x = -5\pi/6+2k\pi, \text{ ou}\\ x = 5\pi/18+k2\pi/3.\end{cases}\end{aligned}$$

Il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, représentées par 4 points sur le cercle trigonométrique.

d. D'après le cours page 15, pour tous réels a et b, $\tan(a) = \tan(b) \iff b = a+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Or $\tan(\pi/4) = 1$. Donc

Peut-on se ramener à une équation avec sin *et* cos *?* Oui.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \tan(3x) = 1 &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x = \pi/4+k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \pi/12+k\pi/3.\end{aligned}$$

Il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, représentées par 6 points sur le cercle trigonométrique.

e. D'après la formule d'addition des sinus, pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) &\iff 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\\ &\iff \begin{cases}\cos(x) = 0, \text{ ou}\\ 2 = 0, \text{ ou}\\ \sin(x) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).\end{cases}\end{aligned}$$

Le deuxième cas est exclu, tandis que $\cos(x) = 0$ si et seulement si x s'écrit sous la forme $\pi/2+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On se ramène à résoudre la dernière équation, 12/10 (fin)

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} x = 3x+\frac{\pi}{4}+2k\pi, \text{ ou}\\ x = \pi-3x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} -2x = \frac{\pi}{4}+2k\pi, \text{ ou}\\ 4x = \frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8}+k\pi, \text{ ou}\\ x = \frac{3\pi}{16}+k\pi/2.\end{cases}\end{aligned}$$

Finalement il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, représentées par $2+2+4 = 8$ points sur le cercle trigonométrique.

I.7. Exercice

Cet exercice est important, il faut savoir le faire en vue des exercices I.8 et II.6.

On pose $f(x) = \sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ puis sous la forme $A\sin(x+\varphi)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = 10$.

a. On cherche A positif. D'après le cours $A^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4$, donc $A = 2$. Puis

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\cos(\pi/6)\cos(x) + \sin(\pi/6)\sin(x)\right)\\ &= 2\cos(x - \pi/6), \qquad (16)\end{aligned}$$

d'après la formule d'addition des cos. De même,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\sin(\pi/3)\cos(x) + \cos(\pi/3)\sin(x)\right)\\ &= 2\sin(x + \pi/3),\end{aligned}$$

d'après la formule d'addition des sin.

b. D'après (16),

$$f(x) = 2 \iff 2\cos(x - \pi/6) = 2 \iff \cos(x - \pi/6) = 1.$$

C'est le cas si et seulement si $x = \pi/6 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solutions, comme on peut le voir de deux manières :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\sqrt{3} - 1 \leqslant \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \leqslant \sqrt{3} + 1;$$

or $1 + \sqrt{3} \leqslant 2.8 < 10$.

— D'après (16), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-2 \leqslant \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \leqslant 2;$$

or $2 < 10$.

I.8. Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

a. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ ou}\\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.\end{cases}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \text{ ou}\\ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

b. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right]\\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right]\\ &= \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} &\iff \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\\ &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi, \text{ ou}\\ x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi.\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12}+2k\pi,, \text{ ou}\\ x = -\frac{5\pi}{12}+2k\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

II. Fonctions trigonométriques réciproques

II.1. Exercice

Donner les valeurs des arccosinus et arcsinus de $0, 1, -1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donner les valeurs des arctangentes de $0, 1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}/3$.

On présente les résultats sous la forme d'un tableau :

x	0	1	-1	$-1/2$	$1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$\arccos(x)$	$\pi/2$	0	π	$2\pi/3$	$\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$		
$\arcsin(x)$	0	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/6$	$\pi/6$	$-\pi/4$	$-\pi/3$		
$\arctan(x)$	0	$\pi/4$						$\pi/3$	$-\pi/6$

II.2. Exercice

Déterminer une valeur possible de x écrite en fonction de $\arcsin, \arccos, \arctan$ dans chacun des cas suivants :

a. $\begin{cases}\cos(x) = 1/3\\ \sin(x) = 2\sqrt{2}/3\end{cases}$

b. $\begin{cases}\cos(x) = -1/3\\ \sin(x) = 2\sqrt{2}/3\end{cases}$

c. $\begin{cases}\cos(x) = 1/3\\ \sin(x) = -2\sqrt{2}/3\end{cases}$

d. $\begin{cases}\cos(x) = -1/3\\ \sin(x) = -2\sqrt{2}/3\end{cases}$

Dans chaque cas, l'existence de solutions est garantie par le fait que $(1/3)^2+(2\sqrt{2}/3)^2 = 1/9+8/9 = 1$.

	arcsin	arccos	arctan
a	$x = \arcsin(2\sqrt{2}/3)$	$x = \arccos(1/3)$	$x = \arctan(2\sqrt{2})$
b	$x = \pi - \arcsin(2\sqrt{2}/3)$	$x = \arccos(-1/3)$	$x = \pi + \arctan(-2\sqrt{2})$
c	$x = \arcsin(-2\sqrt{2}/3)$	$x = -\arccos(1/3)$	$x = \arctan(-2\sqrt{2})$
d	$x = \pi - \arcsin(2\sqrt{2}/3)$	$x = -\arccos(-1/3)$	$x = \pi + \arctan(2\sqrt{2})$.

II.3. Exercice*

En vous appuyant sur un cercle trigonométrique, que pouvez-vous dire de $\arccos(-x)$, $\arcsin(-x)$, $\arctan(-x)$?

Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ et $\arccos(-x) = \pi/2 - \arccos(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

II.4. Exercice*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculer $f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0, qui est la réunion des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Par composition, f est dérivable sur ces deux intervalles, et d'après la formule de dérivation d'une composée,

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^{-2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Or une fonction dérivable sur un intervalle, et dont la dérivée est nulle, est constante sur cet intervalle. Donc f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour connaître les valeurs de ces constantes, évaluons f en -1 et 1 respectivement. On obtient :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \arctan(x) + \arctan(1/x) = f(-1) = -\pi/2 \quad (17)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \arctan(x) + \arctan(1/x) = f(1) = \pi/2. \quad (18)$$

II.5. Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \ 2\sin^2(x) + 7\sin(x) + 3 = 0$$

$$(E_2) : \ 3\sin^2(x) - 5\sin(x) - 2 = 0.$$

Pour résoudre (E_1) on se ramène à une equation du second degré en posant $S = \sin(x)$:

$$(E_1^*) : \ 2S^2 + 7S + 3 = 0.$$

On cacule : $\Delta = 49 - 24 = 5^2$, les deux solutions réelles sont

$$S^+ = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}, \quad S^- = \frac{-7-5}{4} = -3.$$

x est donc solution si et seulement si $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = -3$. Or pour tout x réel on sait que $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$,on ne conserve donc que la première équation, que l'on sait résoudre :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = -1/2 \iff \sin(x) = \sin(-\pi/6) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\pi/6 + 2k\pi, \text{ ou} \\ x = 7\pi/6 + 2k\pi. \end{cases}$$

On procède de même pour (E_2) :

$$(E_2^*) :\ 3S^2 - 5S - 2 = 0.$$

Si l'on a une bonne mémoire, on se souvient de l'exercice I.9 page 10 qui demandait de résoudre la même équation. Sinon ce n'est pas grave, on calcule Δ et on trouve

Merci à Xuemeng (2018)

$$S^+ = \frac{5+7}{6} = 2, \quad S^- = \frac{5-7}{6} = -1/3.$$

On se donne θ tel que $\sin(\theta) = -1/3$, par exemple $\theta = \arcsin(-1/3)$, puis

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \theta + 2k\pi, \text{ ou} \\ x = \pi - \theta + 2k\pi. \end{cases}$$

II.6. Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) :\ -2\cos(x) + 2\sin(x) = 1$$
$$(E_2) :\ 3\cos(x) - 2\sin(x) = \frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$(E_3) :\ -5\cos(x) - 3\sin(x) = 1.$$

C'est très semblable à l'exercice I.8 sauf que nous avons maintenant les fonctions trigonométriques réciproques à disposition.

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) = 1 \\ &\iff \cos(x)\cos(-\pi/4) + \sin(x)\sin(-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &\iff \cos(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/4)$. Alors x est solution de (E_1) si et seulement si $\cos(x + \pi/4)$ est égal à $\cos(\alpha)$, soit

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \alpha - \pi/4 + 2k\pi, \text{ ou} \\ x = -\alpha - \pi/4 + 2k\pi. \end{cases}$$

De même, posant $\beta = -\arccos(3\sqrt{13}/13)$,

Les $\sqrt{13}$ se simplifient, on en profite.

$$\begin{aligned}
(E_2) \iff & \sqrt{13}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\cos(x) - \frac{2\sqrt{13}}{13}\sin(x)\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
\iff & \cos(x)\cos(\beta) + \sin(x)\sin(\beta) = \frac{1}{2} \\
\iff & \cos(x-\beta) = \cos(\pi/3) \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \pi/3 + \beta + 2k\pi, \text{ ou} \\ x = -\pi/3 + \beta + 2k\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, en posant $\gamma = \pi + \arctan(3/5)$ et $\delta = \arccos(\sqrt{34}/34)$,

Les $\sqrt{34}$ ne se simplifient pas, on continue malgré tout.

$$\begin{aligned}
(E_3) \iff & \sqrt{34}\left(-\frac{5\sqrt{34}}{34}\cos(x) - \frac{3\sqrt{34}}{34}\sin(x)\right) = 1 \\
\iff & \cos(x)\cos(\gamma) + \sin(x)\sin(\gamma) = \frac{\sqrt{34}}{34} \\
\iff & \cos(x-\gamma) = \cos(\delta) \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \delta + \gamma + 2k\pi, \text{ ou} \\ x = -\delta + \gamma + 2k\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

à vous de jouer !

TD 3. Nombres complexes

I. Coordonnées polaires

II. Ecritures d'un nombre complexe

20/10, 02/11

II.1. Exercice

II.2. Exercice

Seuls z_1 à z_{10} inclus on été corrigés en classe.

1. $z_1 = j = e^{j\pi/2}$.
2. $z_2 = 4 = 4e^{j0}$.
3. $z_2 = -5j = 5e^{j3\pi/2}$.
4. $z_4 = -3 = 3e^{\pi j}$.
5. $z_5 = 2+2j = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)j\right) = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$.
6. $z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j = \cos(-2\pi/3) + \sin(-2\pi/3)j = e^{-j2\pi/3}$. 02/11 — 10/11
7. $z_7 = -5-5j = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}e^{j5\pi/4}$.
8. $z_8 = 3\sqrt{3} - 3j = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = 6e^{-j\pi/6}$.
9. $z_9 = \sqrt{13}e^{j\arctan(3/2)}$.
10. $z_{10} = \sqrt{17}e^{j\arctan(-4)}$.
11. $z_{11} = \sqrt{29}e^{j(\arctan(5/2)+\pi)}$.
12. $z_{12} = 2e^{j4\pi/3}$.
13. $z_{13} = \frac{\sqrt{6}-j\sqrt{2}}{2(1+j)} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}/2-1/2j}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2j} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{e^{-j\pi/6}}{e^{j\pi/4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-j5\pi/12}$.
14. $z_{14} = \left(\frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{1-j\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}}{2e^{-j\pi/3}}\right)^2 = (2e^{j\pi/12})^2 = 4e^{j\pi/6}$.

II.3. Exercice*

a. $z_1 = -1-j = \sqrt{2}e^{j5\pi/4}$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = e^{j\pi/3}$, donc

$$Z = z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{j(5\pi/4+\pi/3)} = \sqrt{2}e^{j19\pi/12}.$$

b. Pour déterminer la forme algébrique de Z, on multiplie z_1 et z_2 *sous forme algébrique* :

$$Z = (-1-j)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j - \frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)j.$$

c. Nous avons vu à la question a que $Z = -\sqrt{2}je^{j\pi/12}$, donc $jZ = \sqrt{2}e^{j\pi/12}$, et

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\mathfrak{Im}(jZ)}{\mathfrak{Re}(jZ)} = \frac{\mathfrak{Re}Z}{-\mathfrak{Im}Z} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Remarque (en vue du TD4). — La valeur de $\tan\frac{\pi}{12}$ est très proche de $\pi/12$ (la variation réelle de tan entre 0 et $\pi/12$ est proche de sa variation estimée) :

$$\frac{\pi}{12} \approx 0.261799 \qquad \tan\frac{\pi}{12} \approx 0.26794.$$

III. Formule d'Euler et conséquences

III.1. Exercice

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8j^3}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{8j}\left(e^{3jx} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{3jx}\right) \\
&= -\frac{1}{8j}\left(2j\sin(3x) - 6j\sin(x)\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x).
\end{aligned}$$

b. D'après ce qui précède,

$$\int \sin^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(3x) + c,\, c \in \mathbb{R}.$$

TD 6. Equations différentielles

I. Equations différentielles du premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes
a. $yy' = x$
b. $xyy' = 1$
c. $xy'y^3 = -2$
d. $yy' = 1 + \ln x$
e. $(1 + x^2)\sqrt{y}y' = 2x$
f. $2y' = (1 + y)xe^x$

Ces équations sont à variables séparables. On suit la méthode du cours. On ne se souciera pas des intervalles de définition.

a. Après séparation des variables, $y\,dy = x\,dx$, puis
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
Donc $y = \pm\sqrt{x^2 + k}$, $k \in \mathbb{R}$ (on a changé de constante k, on le fera fréquemment dans la suite). Cette notation $\pm$ amène ici commentaire. Dans ce cas il ne peut pas y avoir de passage de $+$ à $-$ (les deux branches de la solution), car cela donnerait un point de non définition de la dérivée. Cependant, cela peut arriver en général.

b. Après séparation des variables $y\,dy = dx/x$, donc $y = \pm\sqrt{2\ln x + k}$, $k \in \mathbb{R}$.

c. Ceci se réécrit $y^3 dy = -2/x$. Après primitivation, $\frac{y^4}{4} = \frac{-2}{x} + k$. Donc
$$y = \pm\sqrt[4]{-8/x + k}$$
où k est une constante réelle.

d.

e. Ceci se réécrit $(1 + x^2)\sqrt{y}dy = 2x dx$, soit après séparation des variables $\sqrt{y}dy = \frac{2x}{1+x^2}dx$. On primitive :
$$\frac{2}{3}y\sqrt{y} = \ln(1 + x^2) + k, k \in \mathbb{R},$$
d'où $y = \left(\frac{3}{2}\ln(1 + x^2) + k\right)^{2/3}, k \in \mathbb{R}$, quitte à changer de constante k.

f. Ceci se réécrit $\frac{2dy}{1+y} = xe^x dx$. On primitive (par IPP à droite) :
$$2\ln(1 + y) = (x - 1)e^x + k,$$
donc $y = k\exp\frac{(x-1)e^x}{2}$.

Résoudre les équations différentielles suivantes où l'inconnue est la variable x (on ne précisera pas les intervalle de définition)

a. $y' + xy = x^2 + 1$

b. $y' - y = x^2 + 1$

c. $xy' - 2y = x^2$

d. $2y' - xy = x$

e. $(1-x)y' - y(x^2+5) = 0$

f. $y' + y = x^2e^x$

g. $xy' - y = x^2e^x$

h. $y' + x(y+2) = x$

i. $y' + 2(y-2) = e^x$

a. On commence par résoudre l'équation homogène
$$y' + xy = 0. \tag{19}$$
Il s'agit d'une équation de la forme $ay' + by = 0$, de solution $k\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx)$ avec $k \in \mathbb{R}$. Ici donc, les solutions de l'équation homogène sont les
$$y_h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}},$$
où k est une constante réelle. Ensuite, on cherche une solution particulière. Ici la fonction $y_p(x) = x$ convient. Finalement, l'ensemble des solutions est celui des fonctions de la forme
$$y(x) = x + ke^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b. L'équation homogène est
$$y' - y = 0, \tag{20}$$
dont la solution est $y(x) = ke^x$. Cherchons une solution particulière parmi les polynômes ; le terme de droite nous informe que l'on peut se limiter au degré au plus 2, c'est-à-dire $y(x) = ax^2 + bx + c$, où les coefficients a, b, c sont indéterminés. Nous voulons donc
$$2ax + b - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1. \tag{21}$$
L'identification donne le système formé des équations $a = -1$, $2a-b = 0$ et $b-c = 1$, d'où $a = -1$, $b = -2$ et $c = -3$. On a trouvé une solution particulière ; la solution générale est
$$y(x) = -(x^2 + 2x + 3) + ke^x.$$

c. Equation homogène :
$$xy' - 2y = 0. \tag{22}$$
Les solutions de cette équation sont les $y(x) = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, appliquons la méthode de Lagrange : cherchons y sous la forme $y(x) = k(x)x^2$, où k est une fonction inconnue. On remplace dans l'équation, cela donne
$$xy' - 2y = 2kx^2 + k'x^3 - 2kx^2 = x^2,$$
d'où $k'(x) = \frac{1}{x}$. On trouve donc comme solution particulière $y(x) = x^2 \ln x$. La solution générale est
$$y(x) = x^2(k + \ln x),$$
avec $k \in \mathbb{R}$.

d. Equation homogène $2y' - xy = 0$, de solutions $y_h(x) = ke^{x^2/4}$. On remarque aussi que $y_p = -1$ est solution particulière "évidente". Nous concluons que la solution générale est

$$y(x) = ke^{x^2/4} - 1, k \in \mathbb{R}.$$

e. Cette équation est déjà homogène, c'est une bonne nouvelle, cela signifie qu'il n'y a qu'une primitive à calculer. Allons-y :

$$\begin{aligned} y(x) = K_0 \exp\left(\int \frac{1-x}{x^2+5}\,dx\right) &= \exp\left(\int \frac{dx}{x^2+5} - \int \frac{x}{x^2+5}\,dx\right) \\ &= K_0 \exp\left(\frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x/\sqrt{5})^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx\right) \\ &= K_0 \exp\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(x/\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + k\right) \\ &= K\sqrt{x^2+5}e^{\frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(x/\sqrt{5})}, \end{aligned}$$

où K est une constante réelle.

f. La solution de l'équation homogène est $y(x) = e^{-x}$. Pour trouver une solution particulière, employons la méthode de Lagrange.

$$y'(x) + y(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x^2e^x,$$

c'est-à-dire $k'(x) = x^2e^{2x}$. Nous savons primitiver ceci par IPP :

$$\int x^2e^{2x}dx = x^2\frac{e^{2x}}{2} - \int 2x\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x}.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x + ke^{-x},$$

où k est une constante réelle.

g. L'équation homogène $xy' - y = 0$ a pour solutions les $y_h(x) = kx$, où k est une constante réelle. La technique de variation de la constante nous amène à rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)x$, où k est une fonction inconnnue. Or le calcul donne

$$xy'(x) - y(x) = x^2e^x \iff k'(x) = e^x \iff k(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale est donc $y(x) = (k + e^x)x$, avec $k \in \mathbb{R}$.

h. Pour rendre le membre de gauche homogène en y, on réécrit l'équation sous la forme équivalente

$$y' + xy = -x.$$

L'équation homogène associée est $y' + xy = 0$, de solution k/x, $k \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $y = -1$. Donc la solution générale est $y(x) = -1 + k/x$.

i. De même, une équation équivalente est $y' + 2y = e^x + 4$. La solution de l'équation homogène est $y_h(x) = k/x^2$, et une solution évidente est $y(x) = e^x/2 + 2$. La solution générale est donc $y(x) = \frac{e^x}{2} + 2 + k/x^2$, où k est une constante réelle.

II. Equations différentielles linéaires du second ordre (à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes où l'inconnue est y et la variable x :

a. $y'' - y' - 6y = 3$

b. $y'' - y = x^2$

c. $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$

d. $y'' + 2y' + 2y = 0$

e. $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3x$

f. $y'' - 2y' + 3 = x^2$

a. L'équation homogène associée est $y'' - y' - 6y = 0$, elle-même d'équation caractéristique $r^2 - r - 6 = 0$. On calcule que $\Delta = 25 > 0$, donc il y a deux racines réelles simples qui sont 3 et -2, et la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x},$$

où A et B sont des constantes réelles. Il reste à trouver une solution particulière. La fonction constante $y = -1/2$ convient à cela. C'est un cas particulier de la méthode du cours, dans le cas où le second membre est un polynôme.

Interrogation du 11 octobre 2017

Sujet α

1. Dériver les fonctions suivantes sans vous soucier du domaine de dérivation :
$$f_1(x) = x\sqrt{\sin(x)}\ ; \quad f_2(x) = \frac{2}{(5e^{-x}+3)^3}\ ; \quad f_3(x) = \ln^3(5x).$$
2. Compléter les formules de dérivation suivantes (u étant une fonction de la variable réelle x) :
$$(u^n)' = \qquad\qquad (\cos(u))' =$$
3. Compléter la formule trigonométrique :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a-b) =$$
4. Compléter les ensembles de définition et ensembles image de l'application suivante : arctan : $\ldots \to \ldots$.

1. On écrit f_1 sous la forme $f_1(x) = u(x)\cdot v(x)$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{\sin(x)}$. D'après la formule de dérivée d'une composée, $v'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$. Puis d'après la formule de dérivée d'un produit,
$$f_1'(x) = \frac{x\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} + \sqrt{\sin(x)}.$$
Écrivons f_2 sous la forme $u\circ v$ avec $u(x) = 2/x^3$ et $v(x) = 5e^{-x}+2$. Alors
$$f_2'(x) = \frac{-2\cdot 3\cdot v'(x)}{v(x)^4} = \frac{30e^{-x}}{(5e^{-x}+3)^4}.$$
De même pour f_3 : $f_3 = u\circ v$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(5x)$, donc
$$f_3'(x) = 3v'(x)\ln^2(5x) = \frac{3}{x}\ln^2(5x).$$
2. D'après la formule de dérivation des composées,
$$(u^n)' = u'\cdot nu^{n-1} \qquad (\cos(u))' = -u'\cdot\sin(u).$$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
4. arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sujet β

1. Dériver les fonctions suivantes sans vous soucier du domaine de dérivation :
$$f_1(x) = \frac{2e^{3x}}{6(2x+1)}\ ; \quad f_2(x) = \ln^3(5x)\ ; \quad f_3(x) = e^{3\cos(5x)}.$$

Solution. Pour dériver f_1, appliquons la formule de dérivation d'un quotient :

$$f_1'(x) = \frac{2 \cdot 3e^{3x} \cdot 6(2x+1) - 2e^{3x} \cdot 12}{36(2x+1)^2} = \frac{e^{3x}}{2x+1} - \frac{2e^{3x}}{3(2x+1)^2}.$$

Pour dériver f_2, appliquons la formule de dérivation d'une composée : $f_2 = u \circ v$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \ln(5x)$, donc

$$f_2'(x) = 3v'(x)\ln^2(5x) = \frac{3}{x}\ln^2(5x).$$

Finalement, $f_3 = u \circ v$, avec $u(x) = e^{3x}$ et $v(x) = \cos(5x)$ (d'autres choix sont possibles), donc

$$f_3'(x) = -15\sin(5x)e^{3\cos(5x)}.$$

2. Compléter les formules de dérivation suivantes (u étant une fonction de x) :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \qquad\qquad (\tan(u))' =$$

Solution. D'après la formule de dérivation des composées,

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad (\tan(u))' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u).$$

3. Compléter la formule trigonométrique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a-b) =$$

Solution.

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

4. Compléter les ensembles de définition et ensembles image de l'application suivante : arccos : $\qquad \to \qquad$.

Solution. arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$.

Deuxième partie

S2 : algèbre linéaire

TD 1. Espaces vectoriels

I. Exercice

02/02/2017

Rappel de cours préliminaire Soit E un ($\mathbb{R}$)-espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-ensemble non vide. F est un sous-espace vectoriel de E si F est *stable par combinaisons linéaires*, c'est-à-dire en langage codé mathématique :

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ au + bv \in F.$$

1. On admet que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré exactement 3 est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$?
   (b) Même question pour l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
2. (a) Montrer que si E est un espace vectoriel et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Avec les mêmes hypothèses, que peut-on dire de la réunion $F_1 \cup F_2$?
3. On admet que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$ est-il un espace vectoriel ?
   (c) L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un espace vectoriel ?
4. (a) L'ensemble $\{(0, 2k),\ k \in \mathbb{R}\}$ i.e. l'ensemble des couples d'éléments de la forme (0, 2k) avec k réel, est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
   (b) Même question avec k entier naturel : l'ensemble $\{(0, 2k),\ k \in \mathbb{N}\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

1. (a) Soit F cet ensemble. Soit $P = X^3 + X$ et $Q = X^3$; ce sont des éléments de F. Mais $P + (-Q) = X^3 + X - X^3 = X$ n'est pas dans F puisque son degré est 1. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Autre exemple : $0X^3 + 0X^3 = 0$ (le polynôme nul) n'est pas dans F.
   Remarque. — Un sous-espace vectoriel de E contient 0_E. Dit autrement, un sous-ensemble de E qui ne contient pas 0_E n'est pas un sous-espace vectoriel.
   (b) Soit F cet ensemble. Vérifions que F est stable par combinaisons linéaires. Soient P et Q deux éléments quelconques de F. Ceux-ci s'écrivent (de manière unique, mais nous n'en aurons pas besoin pour le moment) sous la forme
   $$P = p_3X^3 + p_2X^2 + p_1X + p_0,$$
   $$Q = q_3X^3 + q_2X^2 + q_1X + q_0,$$
   où les p_i et q_i sont des nombres réels. Mais alors, pour tout couple (a, b) de nombres réels,
   $$aP + bQ = (ap_3 + bq_3)X^3 + (ap_2 + bq_2)X^2 + (ap_1 + bq_1)X + ap_0 + bq_0;$$

cette combinaison linéaire est bien de degré au plus 3 (et de degré 3 exactement si $ap_3 + bq_3 \neq 0$). Plus généralement, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\deg(aP + bQ) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.

2. (a) Dire qu'un élément est dans $F_1 \cap F_2$ c'est dire qu'il est dans F_1 *et* dans F_2. Soient donc u et v dans $F_1 \cap F_2$, a et b des nombres réels. Alors :
   - Puisque $u \in F_1$, $v \in F_1$ et puisque F_1 est un sous-espace vectoriel, $au+bv \in F_1$.
   - Puisque $u \in F_2$, $v \in F_2$ et puisque F_1 est un sous-espace vectoriel, $au+bv \in F_2$. Nous avons montré que la combinaison linéaire $au+bv$ est à la fois dans F_1 et dans F_2, ce qui se paraphrase par : $au + bv \in F_1 \cap F_2$. La conclusion est que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel.

   (b) Dire qu'un élément est dans $F_1 \cup F_2$ c'est dire qu'il est dans F_1 *ou* dans F_2. Montrons que $F_1 \cup F_2$ n'est pas forcément un sous-espace vectoriel. Pour cela il suffit de donner un contre-exemple. Soit $E = \mathbb{C}$ l'espace vectoriel des nombres complexes. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E d'après le cours. L'ensemble des nombres imaginaires $i\mathbb{R}$ de la forme it avec t un nombre réel, est aussi un sous-espace vectoriel de E (exercice : le vérifier). Mais $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, par exemple parce que $1 \in \mathbb{R}$ et $i \in i\mathbb{R}$, mais $1 + i$ n'est ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $i\mathbb{R}$. Question[cf. cours, page 4] Pour F un sous-ensemble, on peut dire que F est un sous-espace vectoriel si les trois conditions suivantes sont réunies :

   (sev 1) F est non-vide.

   (sev 2) $F \subset E$.

   (sev 3) $\forall x \in F, \forall y \in F,\ x + y \in F$.

   (sev 4) $\forall x \in F, \forall a \in \mathbb{R},\ ax \in F$.

   Trois de ces quatres conditions sont quand même vérifiées par $F_1 \cup F_2$ quand F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels ; lesquelles ?

3. (a) Soient f et g dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Alors pour tout (a, b) couple de nombres réels, $(af + bg)(0) = af(0) + bg(0) = 0a + 0b = 0$. Donc cet ensemble est bien un sous-espace vectoriel.

   (b) Soit $f = \cos$. Alors $f(0) = 1$. Mais $(2f)(0) = 2$. Donc cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

   (c) D'après le cours d'analyse, la somme et le produit de deux fonctions continues, est continue. En particulier, le produit d'une fonction continue par une fonction constante est continue. On en déduit que les fonctions continues sont stables par combinaisons linéaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, autrement dit que $C(\mathbb{R}, R)$ est un sous-espace vectoriel dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. (a) Soit D cet ensemble. Soient u et v des éléments de D, a et b des nombres réels. On peut écrire $u = (0, 2k_1)$ et $v = (0, 2k_2)$ pour des réels k_1 et k_2. Alors 08/02/2017

$$\begin{aligned} au + bv &= (0, 2ak_1 + 2bk_2) \\ &= (0, 2(ak_1 + bk_2)), \end{aligned}$$

   donc $au + bv \in D$; nous avons montré que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Soit D' cet ensemble. Remarquons que $(0, 2)$ est un élément de D' tandis que $(0, 1) = \frac{1}{2}(0, 2)$ n'en est pas un : nous avons mis en défaut la stabilité par combinaison linéaire (ou, si l'on veut être plus précis, par multiplication par un nombre réel). Il s'ensuit que D' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

II. Exercice

Rappels de cours préliminaire Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Définition 1 (cours, page 4). On dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si toute combinaison linéaire nulle est à coefficients nuls :

$$\forall (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n, \; [a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0]$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée.*

Dire que $\mathcal{F}$ est liée, c'est donc dire qu'il existe une combinaison linéaire nulle dont les coefficients sont non nuls. En particulier (cours), une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires[8].

Définition 2 (cours, page 5). On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x \in E, \exists (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n, \; x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice, on dit que c'est une *base* de E.

Remarque 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans E qui à $(a_1, \dots a_n)$ associe $a_1 x_1 + \dots a_n x_n$. Alors

i. f est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
ii. f est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.
iii. f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base.

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 1 (Théorème de la dimension, - admis : cours p.5, propriétés fondamentales). *Si E admet une base $(x_1, \dots x_n)$, alors toutes ses bases ont n éléments exactement. On appelle cet entier naturel, s'il existe, la* dimension *de E. De plus, dans ce cas,*

— *Toute famille ayant strictement plus de n vecteurs est liée.*
— *Aucune famille ne peut être génératrice si elle a strictement moins de n vecteurs.*
— *Si une famille de n vecteurs est libre* ou *génératrice, alors c'est une base.*

A revoir dans le cours avant de commencer la question 3 : la notion de composante et de coordonnées dans une base (page 6).

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   $\mathcal{F}_1 = ((1,1,0), \; (2,4,1))$
   $\mathcal{F}_2 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (0,0,1))$
   $\mathcal{F}_3 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (4,6,1))$
   $\mathcal{F}_4 = ((1,1,0), \; (2,4,1), \; (0,0,1), \; (5,1,3))$.
3. Quelles sont les coordonnées $\mathcal{F}_2$?

8. On rappelle que u et v sont colinéaires s'il existe a et b non tous les deux nuls dans $\mathbb{R}$ tels que $au = bv$, ou, de manière équivalente, $au + (-b)v = 0$.

1. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est formée par les vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.
2. $\mathcal{F}_1$. Ecrivons $\mathcal{F}_1 = (x_1, x_2)$ et montrons que la famille $\mathcal{F}_1$ est libre. Pour cela, revenons à la remarque qui a été donnée dans le cours : une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires. Ici pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$ax_1 = (a,a,0)$$
$$bx_2 = (2b,4b,b).$$

L'examen de la dernière composante montre que si $ax_1 = bx_2$, alors $b = 0$. Mais alors $bx_2 = 0$, donc $a = 0$. Conclusion, x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires et $\mathcal{F}_1$ est libre. Pour autant, $\mathcal{F}_1$ n'est pas génératrice car elle ne comprend que 2 vecteurs.

$\mathcal{F}_2$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, d'après le cours (p. 5) il suffit par exemple de vérifier que $\mathcal{F}_2$ est libre. Soient donc a_1, a_2, a_3 tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. En coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, cela donne

$$(a_1 + 2a_2, a_1 + 4a_2, a_2 + a_3) = (0,0,0).$$

On en déduit que $2a_2 = a_1 + 4a_2 - (a_1 + 2a_2) = 0 - 0 = 0$, d'où $a_2 = 0$. Puis $a_1 + 2a_2 = 0$ donne $a_1 = 0$. Enfin, $a_2 + a_3 = 0$ nous dit que $a_3 = 0$, aussi. Conclusion, $\mathcal{F}_2$ est libre.

Question 1.1. *Montrer que $\mathcal{F}_2$ est génératrice. Retrouver ainsi que $\mathcal{F}_2$ est libre.*

$\mathcal{F}_3$. On écrit toujours $\mathcal{F}_3 = (x_1, x_2, x_3)$. Observons que

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

bien que les nombres 2, 1 et -1 soient non tous nuls. Ceci nous dit que $\mathcal{F}_3$ est liée. Comme elle compte 3 vecteurs, elle n'est pas génératrice (sinon elle formerait une base, donc serait libre).

$\mathcal{F}_4$. $\mathcal{F}_4$ compte 4 vecteurs. Elle est liée d'après le cours, puisque la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3. Par ailleurs, $\mathcal{F}_4$ est une famille génératrice puisqu'elle contient $\mathcal{F}_2$ qui est une base.

3. Remarquons que $(1,1,1) = x_1 + x_3$, autrement (et un peu bizarrement) écrit :

$$(1,1,1) = 1x_1 + 0x_2 + 1x_3.$$

On dit que les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{F}_2$ sont $(1,0,1)$.

III. Exercice

A préparer pour le 21/02/2017

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de E.

1. $\mathcal{F}_1 = (e_1,\ e_1 + e_2 + e_3)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (e_1,\ e_2,\ e_1 + e_2)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (e_1 - e_2,\ e_2,\ e_3)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_2 + e_3)$.
5. $\mathcal{F}_5 = (e_1 - e_2,\ e_2 - 3e_1,\ 2e_1 + 5e_2)$.

1. La famille $\mathcal{F}_1$ ne peut pas être génératrice, car elle ne comprend que deux vecteurs. Néanmoins, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{F}_1$ est libre.
2. Cette famille n'est pas libre, voici une combinaison linéaire fautive (nulle, mais dont les coefficients ne le sont pas) :
$$e_1 + e_2 + (-1)(e_1 + e_2) = 0.$$
A fortiori elle ne peut pas être génératrice (sinon elle serait une base).
3. $\mathcal{F}_3$ est une base. Montrons par exemple qu'elle est génératrice. Pour cela, soit $x \in E$, que l'on décompose dans $\mathcal{B}$ sous la forme $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Alors
$$x = a_1(e_1 - e_2) + a_1e_2 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_1(e_1 - e_2) + (a_1 + a_2)e_2 + a_3e_3.$$
Question 1.2. *Montrer que $\mathcal{F}_3$ est libre. Retrouver ainsi qu'elle est génératrice (à comparer avec la question 2.$\mathcal{F}_2$ de l'exercice I.2).*
4. Déjà $\mathcal{F}_4$ est génératrice, puisqu'elle contient la base canonique. Mais $\mathcal{F}_4$ n'est pas libre car elle a des vecteurs en plus grand nombre que la dimension de E.
5. Observons que $\mathcal{F}_5$ n'est pas génératrice : chacun des vecteurs qui la composent sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2, de sorte que le vecteur e_3 ne peut pas être combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}_5$. On peut en déduire que $\mathcal{F}_5$ n'est pas libre : si c'était le cas elle serait une base de E, donc génératrice.

IV. Exercice

1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x+2y+z = 0$ c'est à dire que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de F.
2. Même question si F est défini par le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

On donne pour cet exercice deux corrections ; la seconde est celle attendue. La première peut être également relue en gardant à l'esprit que ce qui importe n'est pas tant la méthode que le principe : l'application du théorème du noyau-image.

1. D'après nos connaissances anciennes de géométrie dans l'espace, nous pressentons que F est un plan. Retrouvons ceci par les méthodes de l'algèbre linéaire. Soit donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x, y, z) = x + 2y + z.$$
Alors, $F = \ker f$. On retrouve en particulier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (cours, p.7). De plus, le théorème du noyau-image (cours, p.8) nous dit que
$$\dim F + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$
Or, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (par exemple parce que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x, 0, 0) = x$) ; autrement dit, f est surjective. Il s'ensuit que $\dim F = 3 - 1 = 2$: F est un plan. D'après le théorème de la dimension, si nous trouvons deux vecteurs colinéaires dans F, ils formeront une base. On peut choisir par exemple $u = (1, 0, -1)$ et $v = (2, -1, 0)$.

2. On pose $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + z).$$

Comme dans la question précédente, déterminons la dimension de l'image de g. Plus précisément, montrons que $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$. Soient donc $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$; on veut montrer que (X, Y) est dans l'image de g. Observons que

$$g\left(0, \frac{X - Y}{2}, \frac{X + Y}{2}\right) = (X, Y).$$

Donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$; le théorème du noyau-image nous dit que $\dim F = 1$, autrement dit F est une droite. Il suffit pour trouver une base de F de trouver un unique vecteur non nul dans F. Le vecteur $(2, 1, -3)$ convient (cf. le complément qui suit).

Remarque 2 (Interprétation géométrique). F est défini par deux équations, c'est l'intersection de deux plans *distincts* dans $\mathbb{R}^3$: c'est une droite.

2. Voici une résolution moins théorique et plus conforme de la question. On cherche donc l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que 28/02/17

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On effectue des opérations élémentaires sur ce système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 & (L_1) \leftarrow 2(L_1) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3y + z = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ 2x - y + z = 0 & (L_2) \end{cases}$$

A ce stade nous pouvons remplacer z par $-3y$ (grâce à la première ligne), ce qui donne $2x - 4y = 0$, i.e. $x = 2y$. L'ensemble des solutions est donc de dimension 1, c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $(2y, y, -3y)$. En particulier, une base est $((2, 1, -3))$.

V. Exercice

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Rappeler la base canonique et la dimension de cet espace vectoriel.
2. Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre, si elle est génératrice, si c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$:
   $\mathcal{F}_1 = (3,\quad 1 + 2X,\quad 5 + X)$
   $\mathcal{F}_2 = (1 + X,\quad X,\quad X + X^2)$
   $\mathcal{F}_3 = (X - X^2,\quad X + X^2)$
3. Quelles sont les coordonnées du polynôme $P = 2 + 3X + X^2$ dans la base F_2 ?

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(\mathbf{1}, X, X^2)$.

Remarque 3. Attention, dans la base qui précède $\mathbf{1}$ est le *polynôme* $\mathbf{1}$ (autrement dit, si l'on veut, X^0) ; pour cet exercice il est préférable de ne pas le confondre [9] avec le *nombre* 1 qui est un élément de $\mathbb{R}$. C'est pourquoi on l'écrit en gras jusqu'à la fin de la question 2 (mais on arrêtera ensuite).

2. $\mathcal{F}_1$. Cette famille n'est pas génératrice puisque X^2 n'est pas engendré linéairement par des éléments de $\mathcal{F}_1$; autrement dit $\mathcal{F}_1$ est contenue dans $\mathbb{R}_1[X]$. Elle n'est donc pas libre non plus (sinon ce serait une base étant donné qu'elle est formée de 3 vecteurs).

   $\mathcal{F}_2$. Observons que $\mathbf{1} = (\mathbf{1} + X) - X$ et $X^2 = (X + X^2) - X$, donc tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont engendrés par $\mathcal{F}_2$. Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est génératrice. Puisqu'elle est formée de 3 vecteurs, c'est une base.

   Remarque 4 (Tournant dangereux). Attention, le fait que $X^2 + X = X(\mathbf{1} + X)$ ne constitue <u>pas</u> une relation de liaison linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{F}_2$. Dans un espace vectoriel, « on ne multiplie pas les vecteurs entre eux »(même s'ils ont envie).

   $\mathcal{F}_3$. Cette famille, formée de 2 vecteurs, n'est pas génératrice. Elle est tout de même libre parce que $X - X^2$ et $X + X^2$ ne sont pas colinéaires.

3. Ecrivons $2 + 3X + X^2 = 2(1 + X) + X + X^2$. Donc les coordonnées de P dans $\mathcal{F}_2$ sont $(2, 0, 1)$.

VI. Exercice*

Non traité en classe.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré linéairement par les fonctions $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$.

1. Donner la forme des éléments de E.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
3. Soit φ un réel. Les fonctions $f : x \mapsto \cos(x + \varphi)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$ sont-elles des éléments de E ? Si oui, donner leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.

1. L'ensemble des fonctions dans E, c'est l'ensemble des fonctions de la forme
$$f(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x),$$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

2. Soient donc a, b, c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a + b\cos(x) + c\sin(x) = 0.$$
Evaluons ceci en $x = -\pi/2, 0, \pi/2$, cela donne
$$\begin{cases} a - c = 0 & (L_1) \\ a + b = 0 & (L_2) \\ a + c = 0 & (L_3) \end{cases}$$
$(L_1) + (L_3)$ nous dit que $a = 0$, $(L_1) - (L_3)$ nous dit que $c = 0$, (L_2) nous dit que $b = 0$. On a montré que $\mathcal{B}$ est libre. Par définition, elle est génératrice dans E. Donc, c'est une base.

9. C'est malgré tout une confusion courante (et pas dangereuse avec un peu d'habitude) quand on pense à $\mathbb{R}$ comme à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, par exemple.

3. D'après le cours d'analyse, $\cos(x+\varphi) = \cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x = b\cos x + c\sin x$ avec $b = \cos\varphi$ et $c = -\sin\varphi$. Donc $f \in E$, et

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

En revanche g n'est pas dans E. Pour montrer cela, on peut procéder par l'absurde : supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2x) = a + b\cos x + c\sin x. \tag{23}$$

Alors en particulier, en évaluant cette équation en $x = -\pi/2, 0, \pi$ nous trouvons

$$\begin{cases} 0 = \sin(-\pi) = a - c \\ 0 = \sin(0) = a + b \\ 0 = \sin(\pi) = a + c. \end{cases}$$

L'opération élémentaire $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_3)$ nous dit que $2a = 0$, donc $a = 0$, puis $c = 0$ (par exemple grâce à la dernière ligne $a + c = 0$). Donc la deuxième ligne donne $b = 0$; mais alors (23) devient $\sin(2x) = 0$, ce qui est absurde, par exemple parce que $\sin(2 \cdot \pi/4) = 1$, et parce que $1 \neq 0$.

Pour finir, voici une autre manière de montrer que g n'est pas dans E : tous les éléments de E vérifient l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Ce n'est pas le cas de g. Cette méthode revient à décrire E comme un *noyau*.

TD 2. Applications linéaires et calcul matriciel

VII. Exercice

1. Montrer que l'application h suivante est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 3z, -x + y, y + 5z) \end{aligned}$$

2. L'application g suivante est-elle linéaire ?

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (2xy + 3y, x + y) \end{aligned}$$

1. h est linéaire, parce que c'est une somme d'applications linéaires. Pour caluler la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, nous devons calculer l'image des vecteurs de base, et les exprimer dans $\mathcal{B}$:

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad ; \quad h(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad ; \quad h(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Donc la matrice de h dans $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée est

$$\mathcal{M}_{h,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. g n'est pas linéaire. En effet, si par l'absurde g était linéaire, ce serait aussi le cas de

$$g'(x, y) = g(x, y) - (3y, x + y) = (2xy, 0).$$

Or $2(2x)(2y) = 8xy \neq 2 \cdot 2xy$, ce qui contredit le seconde condition pour être linéaire avec $a = 2$ (cours, page 7).

VIII. Exercice

Avertissement Cet exercice ne comporte aucune difficulté d'abstraction. Il est absolument indispensable de savoir le faire. Par ailleurs, il est beaucoup plus agréable (une fois que l'on a compris) et facile de faire soi-même un produit matriciel plutôt que de regarder quelqu'un d'autre le faire au tableau.

Calcul de $3A$ Multiplier une matrice par un nombre, c'est multiplier tous les éléments de cette matrice par ce même nombre [10] :

10. Après avoir fait quelques produits matriciels, observer que

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on est ainsi tenté de confondre 3Id avec le nombre réel 3 (modulo certaines précautions, qui sont les mêmes que dans la remarque 3).

$$3A = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 3 & 3\times 2 \\ 3\times 5 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times(-2) & 3\times 0 & 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 15 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $2A - 5\mathrm{Id}$ Additionner deux matrices, c'est additionner leurs coefficients :

$$2A - 5\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 10 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 10 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de AB **(produit matriciel)** On a mis des couleurs sur une ligne de A et une (en fait, la) colonne de B pour montrer les produits à effectuer :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ AB = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 1 + 3\times 0 + 2\times 2 \\ 5\times 1 + 1\times 0 + 0\times 2 \\ -2\times 1 + 0\times 0 + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calcul de BA Ce calcul n'est pas possible, parce que B n'a qu'une colonne tandis que A a 3 lignes.

Calcul de BC

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ BC = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 3 & 1\times 1 & 1\times 0 \\ 0\times 3 & 0\times 1 & 0\times 0 \\ 2\times 3 & 2\times 1 & 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de CB Par définition du produit matriciel,

$$CB = (3\times 1 + 1\times 0 + 0\times 2) = (3).$$

Calcul de AD Ce calcul n'est pas possible, parce que D n'a pas autant de lignes que A a de colonnes.

Calcul de DA On ne détaille plus les produits :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ DA = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 16 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calcul de EF

$$EF = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}.$$

Ce calcul montre que F est l'*inverse* de la matrice E (et inversement).

Question 2.1. *Vérifier que l'on a aussi* $FE = \mathrm{Id}$.

IX. Exercice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y, z) \mapsto (2x + 3y, z - 2y).$$

1. (a) Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
   (b) A l'aide d'un calcul matriciel, calculer l'image de $(5, -1, 1)$ par f.
2. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x + y, y)$$

   Déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les matrices des applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$.
4. Calculer $f \circ g(4, 2)$.

1. (a) La matrice de f dans les bases demandées est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Notons $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Alors

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

2. La matrice de g dans $\mathcal{B}_2$ au départ et $\mathcal{B}_3$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de $f \circ g$ dans $\mathcal{B}_2$ au départ et $\mathcal{B}_2$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+0 & -2+3+0 \\ 0-2+0 & 0-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}_3$ au départ et $\mathcal{B}_3$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 6+2 & 0-1 \\ 2+0 & 3-2 & 0+1 \\ 0+0 & 0-2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculons $f \circ g(4, 2)$ dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

   On pourra vérifier « à la main » le résultat de ce calcul matriciel.

X. Exercice

On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$$P \mapsto (X+2)P' - 2P$$

1. Montrer que f est linéaire et préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $f(X^2 - 2X + 3)$ à l'aide d'un calcul matriciel.
3. Déterminer la dimension du noyau de f.

1. Commençons par montrer que $P \mapsto (X+2)P'$ est une application linéaire. On procède pour cela en deux étapes.
   i. L'application $g : P \mapsto (X+2)P'$ est linéaire. Il s'agit en effet de la composition des applications $P \mapsto (X+2)P$ et $P \mapsto P'$, qui sont chacune linéaires. Plus concrètement, on peut se ramener à la définition en vérifiant que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $a \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} g(P+Q) &= (X+2)(P+Q)' = (X+2)(P'+Q') \\ &= (X+2)P' + (X+2)Q' \\ &= g(P) + g(Q); \\ g(aP) &= (X+2)(aP)' = a(X+2)P' = ag(P). \end{aligned}$$
   ii. L'application $P \mapsto (X+2)P' - 2P$ est linéaire en tant que combinaison linéaire d'applications linéaires à valeurs dans un même espace.

   Pour calculer la matrice de f, il faut calculer les images des vecteurs de la base canonique, et les réexprimer dans la base canonique :
   $$\begin{aligned} f(\mathbf{1}) &= (X+2)(\mathbf{1})' - 2 \times \mathbf{1} = -2 \\ &= (-2) \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X) &= (X+2)(X)' - 2X = X + 2 - 2X = -X + 2 \\ &= 2 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X^2) &= (X+2)(X^2)' - 2X = 2X(X+2) - 2X^2 = 2X^2 + 4X - 2X^2 \\ &= 0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot X + 0 \cdot X^2 \end{aligned}$$

   La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc 14/03/2017
   $$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les coordonnées de $f(X^2 - 2X + 3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont données par le calcul matriciel
   $$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   ce que l'on peut retraduire par $f(X^2 - 2X + 3) = 6X - 7$.

3. Nous savons que la dimension de l'image est 2 car incluse dans $\mathbb{R}_1[X]$ et car $f(\mathbf{1})$ et $f(X)$ forment une famille libre. D'après le théorème du noyau-image, la dimension du noyau est égale à $3-2=1$. On peut aussi calculer explicitement le noyau. Allons-y, donc, en remplaçant :

$$\begin{cases} -2x+2y & =0 \\ -y+4z & =0 \\ 0 & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+8z & =0 \\ y=4z & \end{cases} \iff x=y=4z.$$

En particulier le noyau est décrit par un seul paramètre réel, il est de dimension 1. Une base du noyau est $((4,4,1))$.

XI. Exercice

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par : $\varphi(P) = \int_0^X P(x)dx$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
3. Déterminer par un calcul matriciel $\varphi(P)$ avec $P = 2X^2+3X-1$.

1. On rappelle que la propriété de linéarité de l'intégrale s'écrit, pour des bornes *fixées* a et b et deux fonctions continues à valeurs réelles f et g,

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{24}$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{25}$$

Choisissons donc P, Q de degré 2 et c une constante réelle. Alors $\varphi(P+Q)(X) = \varphi(P)(X)+\varphi(Q)(X)$ d'après (24) tandis que $\varphi(cP)(X) = c\varphi(P)(X)$ d'après (25). De plus on sait d'après le cours d'analyse que $\varphi(X^n) = \frac{X^{n+1}}{n+1}$; par linéarité, l'image par φ d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n+1$. Ainsi, φ est linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Puisque $\varphi(X^n) = \frac{X^{n+1}}{n+1}$, la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et $\mathbb{R}_3[X]$ à l'arrivée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Allons-y :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3/2 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

autrement dit

$$\int_0^X (2x^2+3x-1)dx = \frac{2X^3}{3} + \frac{3X^2}{2} - X.$$

XII. Exercice*

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(2)$. φ est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}$.

Soient P, Q dans $\mathbb{R}_3[X]$ et a une constante réelle. Alors

$$\varphi(P+Q) = (P+Q)(2) = P(2) + Q(2) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$
$$\varphi(a) = (aP)(2) = a \times P(2) = a\varphi(P).$$

On a ainsi vérifié que φ est linéaire.

Remarque 5 (Comparaison). Dans l'exercice I, sous-question 3a nous avons montré que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0 est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela, nous l'avons sans le dire identifié à un noyau, celui de l'application $f \mapsto f(0)$ qui est une cousine de φ.

Pour calculer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}$, nous devons calculer l'image des vecteurs de base :

$$\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(2) = 1$$
$$\varphi(X) = X(2) = 2$$
$$\varphi(X^2) = X^2(2) = 2^2 = 4,$$

de sorte que

$$[\varphi]_{(1,X,X^2),1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

XIII. Exercice*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker f = 0_E$.

Si f est injective, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$ implique $x = 0$ étant donné que $f(0) = 0$.

Remarque 6. Cette implication ne demande pas que f soit linéaire, simplement que $f(0_E) = 0_F$.

Réciproquement, si $\ker(f) = 0_E$ alors soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, $f(x-y) = 0$; mézalor $x - y \in \ker f$ donc $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. Nous avons montré que f est injective.

XIV. Exercice*

Une similitude directe s du plan est la composée d'une rotation r et d'une homothétie h.

1. Soit r la rotation vectorielle du plan d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la matrice R de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit h l'homothétie vectorielle du plan de rapport $k \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $h(u) = ku$). Déterminer la matrice H de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire la matrice S de la similitude directe $s = h \circ r$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique, orthonormée directe. Alors

$$r(e_1) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$$
$$r(e_2) = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2.$$

Par conséquent, si l'on admet que r est linéaire.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque 7. Soient θ et θ' deux angles (i.e. deux nombres réels auxquels on pense comme à des angles). Alors la composée de la rotation vectorielle d'angle θ et de la rotation vectorielle r' d'angle θ' est la rotation vectorielle d'angle $\theta+\theta'$; matriciellement,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix},$$

ce qui donne une troisième manière de retrouver les formules d'addition des sin et cos (pour mémoire, les deux premières qui ont été vues au premier semestre faisaient appel au produit scalaire et aux nombre complexes. Ces formules sont importantes, ce sont celles qui permettent par exemple de démontrer que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$).

2. Cette fois-ci, la linéarité de h ne doit pas être un mystère. La matrice de h est

$$H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de s dans une base orthonormée est

$$S = HR = \begin{pmatrix} h\cos\theta & h\sin\theta \\ -h\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

XV. Exercice

A. Il s'agit d'une matrice 2×2, nous appliquons la formule :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 2\times 5 = -4.$$

Puisque $-4 \neq 0$, A est inversible.

B. N'étant pas carrée, B n'a pas de déterminant.

C. Développons selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(-2) + (-1)\times(-2) = 0.$$

En particulier la matrice C n'est pas inversible.

Remarque 8. On donnera une autre méthode pour ce même déterminant dans l'exercice XVIII.

D. Cette matrice est bien carrée ; en développant suivant la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}. = -2-(13)-5\times 1 = 6.$$

E. Cette matrice est bien carrée, et

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-1) = -15.$$

Remarque 9 (facultative). Que le déterminant soit égal au produit des termes diagonaux (en couleurs) est un fait général pour les matrices qui sont triangulaires supérieures, c'est-à-dire avec des 0 en-dessous de leur diagonale, ainsi qu'on le montrerait par récurrence sur la dimension.

XVI. Exercice

La famille $\mathcal{F}_2$ est libre (et génératrice, et base) si et seulement si la matrice formée de ses vecteurs écrits en colonnes dans $\mathcal{B}$ est inversible. On est donc ramené au calcul de déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

comme on le voit par exemple en utilisant que la dernière ligne est nulle. Donc $\mathcal{F}_2$ n'est pas libre. Pour $\mathcal{F}_3$, nous sommes ramenés au calcul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ce qu'on obtient par exemple en développant suivant la première ligne. Donc $\mathcal{F}_3$ est libre. Enfin,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pour les mêmes raisons que $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_5$ est liée.

XVII. Exercice

1. Commençons par écrire la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée :

$$A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite (par exemple avec la formule du cours pour les matrices 3×3) :

$$\det A = 8+1+1-2-2-2 = 4.$$

Puisque $\det A \neq 0$, f est bijective.

2. Un calcul matriciel donne
$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$
donc $AB = \mathrm{Id}$. Par conséquent, si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ désigne l'application linéaire dont B est la matrie dans la base canonique au départ et à l'arrivée, la matrice de $f \circ g$ est Id, autrement dit $f \circ g(x)$ est l'identité (la plus paresseuse des applications linéaires, celle qui ne fait rien bouger). Autrement dit, g est l'application linéaire réciproque de f.
3. Vue la matrice B,
$$f^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{3u-v-w}{4}, \frac{-u+3v-w}{4}, \frac{-u-v+3w}{4}\right).$$

XVIII. Exercice

Calcul de d_1 Pour calculer d_1, travaillons sur les lignes.
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&4\\1&4&6\\0&1&1\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1&2&4\\1&2&4\\0&1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\\(L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_3)\\(L_3)\end{matrix}\\ &= \begin{vmatrix}0&0&0\\1&2&4\\0&1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\leftarrow(L_1)-(L_2)\\(L_2)\\(L_3)\end{matrix}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ceci corrobore le calcul de ce même déterminant dans l'exercice XV à la question C.

Calcul de d_2 Pour calculer d_2, on peut par exemple commencer par une opération sur les lignes :
$$d_2 = \begin{vmatrix}3&1&2\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&-1\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} \begin{matrix}(L_1)\leftarrow(L_1)-(L_3)\\(L_2)\\(L_3)\end{matrix}$$
ce qui rend le développement suivant la première ligne plus facile :
$$\begin{vmatrix}3&0&-1\\2&2&4\\4&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix} = 4.$$

Il est tout autant possible de travailler sur les colonnes pour faire apparaître des zéros sur la première colonne et faciliter ainsi le développement suivant la première colonne.

Calcul de d_3 Il est commode de remarquer que la première et la dernière colonne sont identiques. Par conséquent, quitte à effectuer l'opération sur les colonnes $(C_1) \leftarrow (C_1) - (C_3)$, on trouve que
$$d_3 = \begin{vmatrix}0&5&1&3\\0&2&3&1\\0&1&4&2\\0&2&-6&0\end{vmatrix} = 0.$$

XIX. Exercice

Les déterminants d_1 et d_2 sont nuls, parce que dans les deux cas, la dernière colonne est la somme des deux premières, ce qui permet de se ramener à une colonne nulle en effectuant les deux opérations élémentaires sur les colonnes $(C_3) \leftarrow (C_3) - (C_1)$ puis $(C_3) \leftarrow (C_3) - (C_2)$. Enfin, d_3 est nul parce que la première des colonnes est nulle.

TD 3. Développements limités

I. Exercice : formule de Taylor-Young

a. Soient n un entier naturel, f une fonction de classe C^n au voisinage de[11] x_0 ; alors il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0, continue et de limite nulle en x_0, telle que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

En particulier, si $x_0 = 0$, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \varepsilon(x)x^n.$$

b. Les DL de sin et cos font partie du cours. Ils permettent d'écrire, pour x au voisinage de 0,

$$\tan x = \frac{x - x^3/6 + \varepsilon_1(x)x^3}{1 - x^2/2 + \varepsilon_2(x)x^3},$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions (différentes a priori) de limite nulle en 0. Par le théorème de DL d'une composée,

$$\frac{1}{1 - x^2/2 + \varepsilon_2(x)x^3} = 1 + x^2/2 + \varepsilon_3(x)x^3,$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$. Par le théorème de DL d'un produit,

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon_1(x)x^3\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \varepsilon_3(x)x^3\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon_4(x)x^3 = x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon_4(x)x^3, \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_4(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi, tan possède un DL_3 en 0, à savoir

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon_4(x)x^3.$$

c. Observons que, pour x assez proche de 0,

$$\begin{aligned} \ln(3x + 2) &= \ln(2(1 + 3x/2)) \\ &= \ln 2 + \ln(1 + 3x/2). \end{aligned}$$

D'après le cours, le DL de ln en 1 est connu à tout ordre. Par composition,

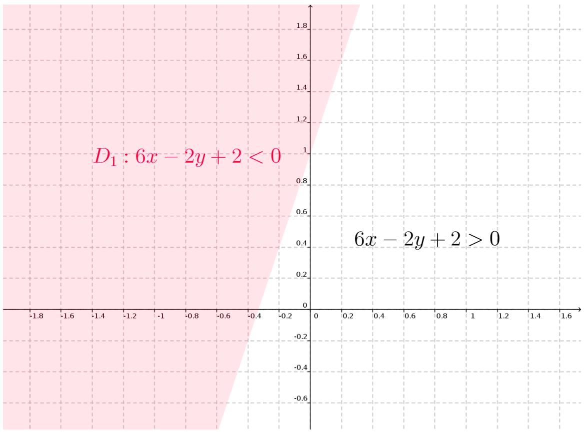
$$\begin{aligned} \ln(3x + 2) &= \ln 2 + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \varepsilon(x)x^3 \\ &= \ln 2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \varepsilon(x)x^3, \end{aligned}$$

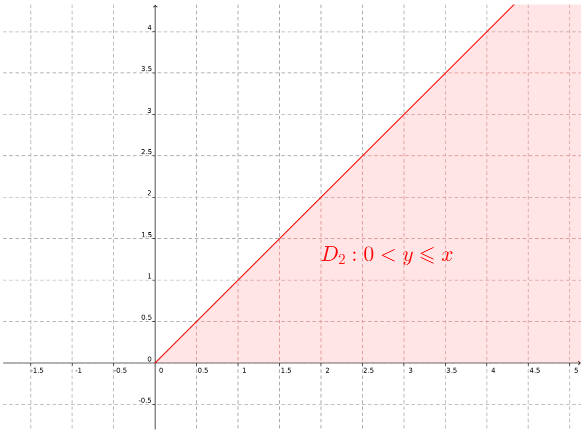
où ε est une fonction de limite nulle en 0. Ceci nous dit tout à la fois que la fonction $x \mapsto \ln(3x+2)$ admet un DL_2 en 0, et que celui-ci est donné par la formule précédente.

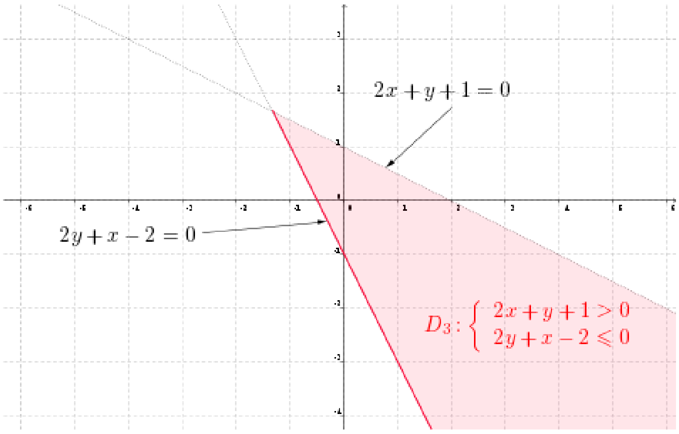
11. « au voisinage de ... » signifie « sur un (petit) intervalle ouvert contenant ... »

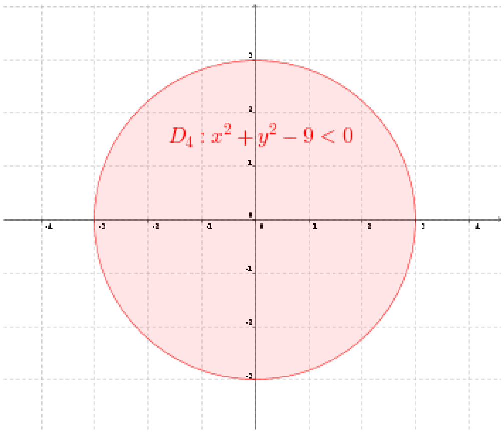
TD 4. Dérivées partielles et gradients

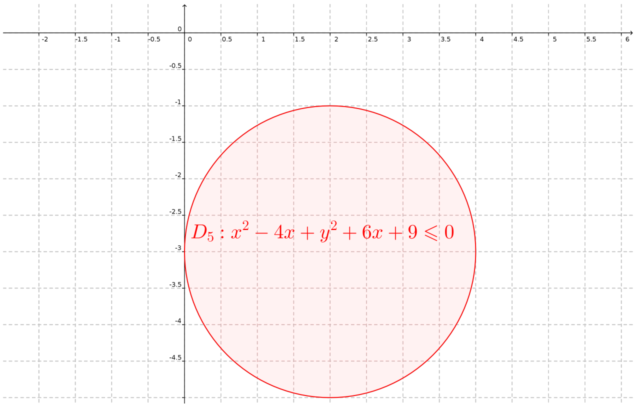
I. Exercice

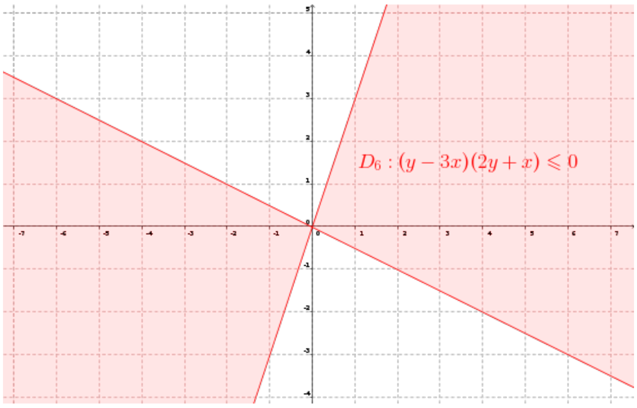


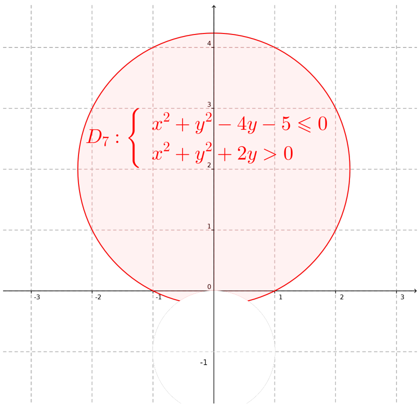


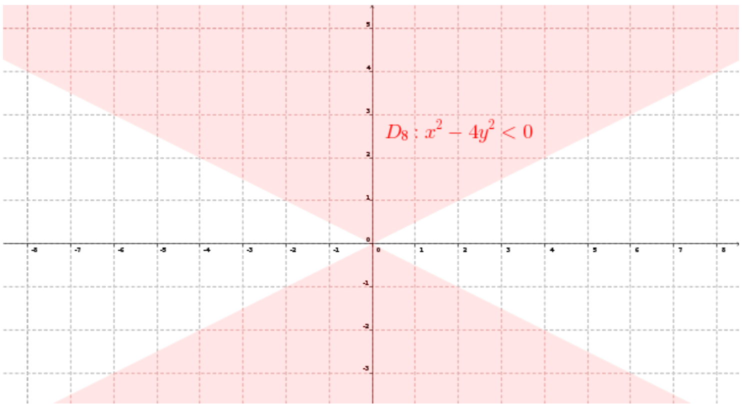


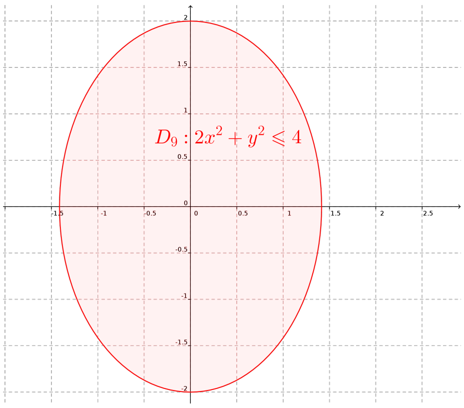


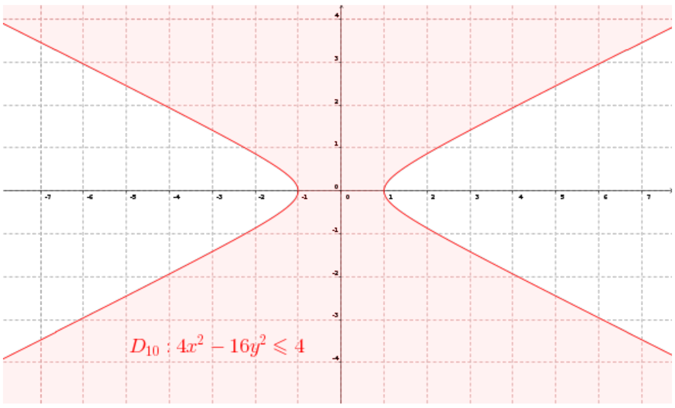












II. Exercice

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x^3y^2 + 2y\cos(2xy) \\ 4x^4y + 5 + 2x\cos(2xy) \end{pmatrix}.$$

b) $\mathcal{D}_f = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$,

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{xy^2-1}{x^2} e^{xy^2} \\ 2ye^{xy^2} \end{pmatrix}.$$

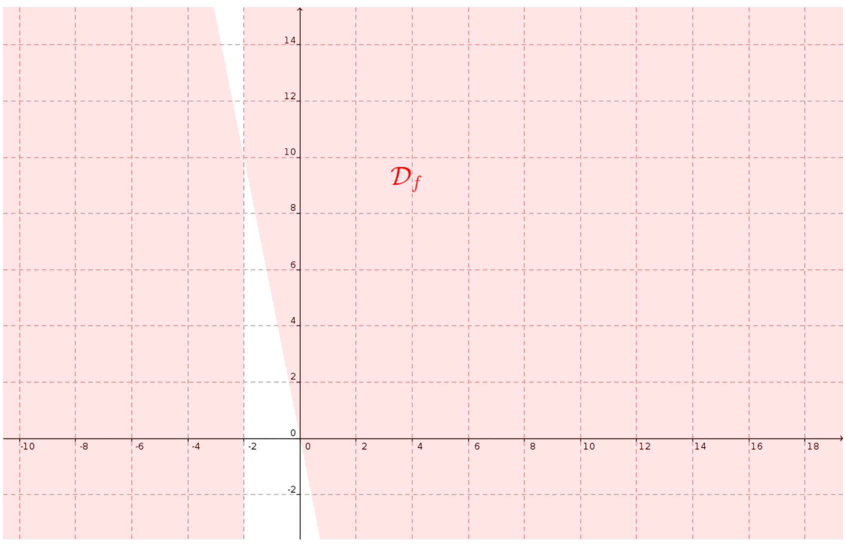
c) Le domaine de définition est la parabole pleine $\mathcal{D}_f = \{y \geqslant x^2\}$: le gradient est défini à l'intérieur du domaine de définition (c'est à-dire-partout sur $\mathcal{D}_f$ sauf sur la parabole frontière) et

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{y-x^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) $\mathcal{D}_f$ est la réunion de $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ et de $\{(x,y) : x < 0, y < 0\}$, le gradient est défini partout sur ce domaine, et

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \ln(xy) \\ x/y \end{pmatrix}.$$

e) Pour que $f(x,y)$ soit défini, il faut que $\frac{5x+y}{2x+4}$ soit défini et strictement positif ; soit encore, que $5x + y > 0$ quand $2x + 4 > 0$ (c'est-à-dire quand $x > -2$), et $5x + y < 0$ quand $2x + 4 < 0$ (c'est-à-dire quand $x < -2$). L'allure de $\mathcal{D}_f$ est figurée ci-dessous :



Le gradient est défini sur $\mathcal{D}_f$, et si l'on écrit $f = \ln(g)$, avec $g(x,y) = \frac{5x+y}{2x+4}$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{20-2y}{(2x+4)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2x+4},$$

d'où

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{2x+4}{5x+2y} \cdot \vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{20-2y}{(2x+4)(5x+y)} \\ \frac{1}{5x+2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10-y}{(x+2)(5x+y)} \\ \frac{1}{5x+2y} \end{pmatrix}.$$

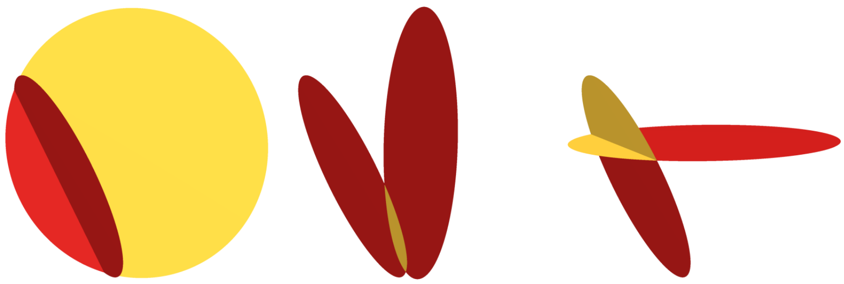
Autre méthode pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$: remarquons que $f(x,y) = \ln \frac{5x+y}{2x+4} = \ln|5x+y| - \ln|2x+4|$, et le dernier terme ne dépend pas de y, d'où $\partial f/\partial y(x,y) = 1/(5x+y)$.

III. Exercice

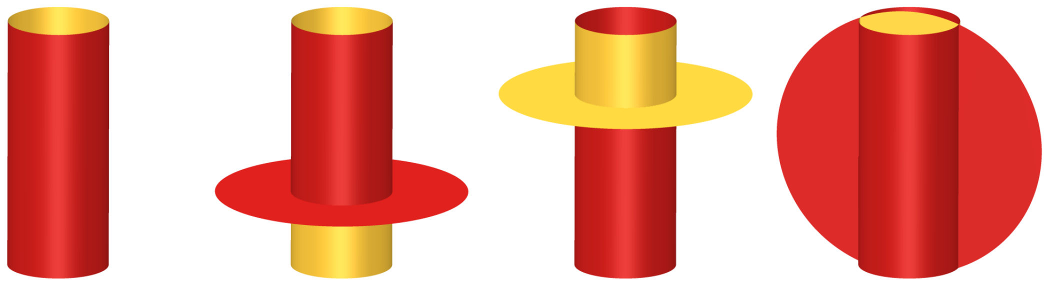
Voici l'allure des ensembles demandés (on n'a dessiné que la partie située dans une boule centrée en l'origine, et pas les axes de coordonnées) :

a. $4x + 6y + 3z - 12 = 0$:

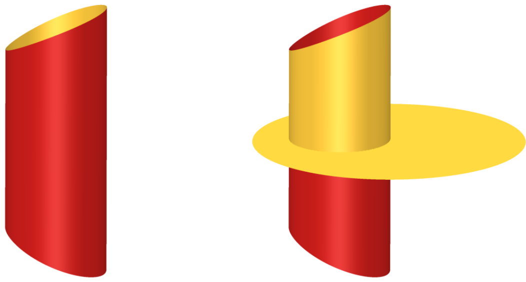
Les plans d'annulation d'une coordonnée sont rajoutés ci-dessous (pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ respectivement. Leurs intersections avec l'ensemble demandé sont des droites.



b. Voici l'ensemble $S_2 : x^2 + y^2 = 1$; puis on rajoute les plans d'équation $z = -1$, $z = 1$ puis $x = 0$. Les intersections S_2 avec $\{z = c\}$ sont des cercles, l'intersection avec $\{x = 0\}$ est formée des deux droites d'équation $\{x = 0, y = \pm 1\}$.

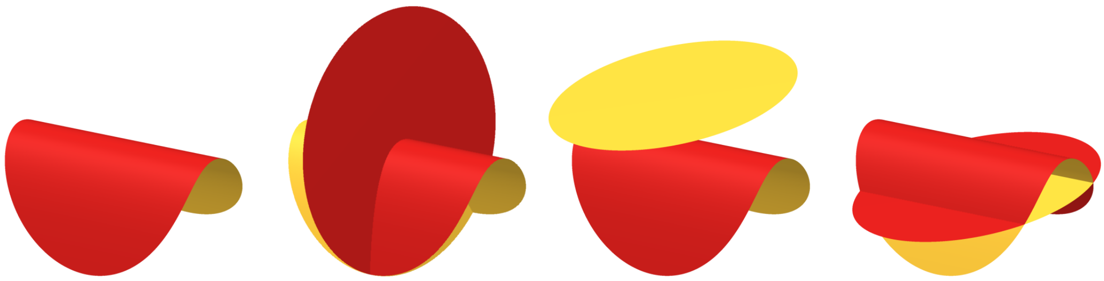


c. Ensemble $S_3 : x^2 + y^2 = 2y$, puis on rajoute le plan $z = 0$:



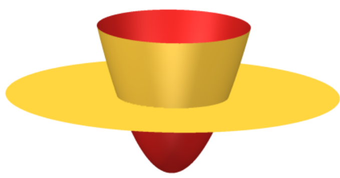
L'intersection (comme avec tout plan horizontal) est un cercle.

d. Ensemble d'équation $x^2 = z$ (on a fait tourner légèrement les axes Ox et Oy par rapport aux questions précédentes. Puis on rajoute les plans $\{y = 0, \{z = 1\}, \{z = -1\}$.

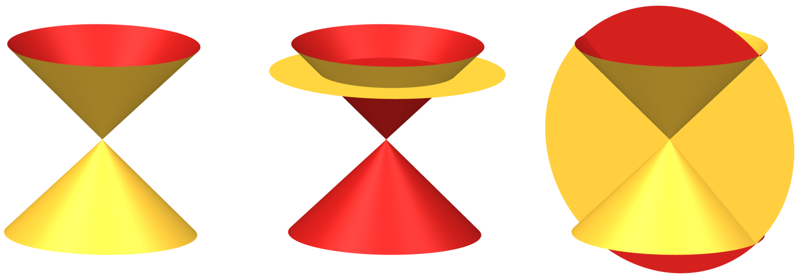


Les intersections respectives sont : une parabole $\{z = x^2, y = 0\}$; l'ensemble vide ; une droite double $\{z = -1, x = \pm 1\}$.

e. Ensemble d'équation $z = 1 + x^2 + y^2$: puis on rajoute les plans d'équations $x = 0$, $z = 1$ et $z = 3$



f. Ensemble d'équation $z^2 = x^2 + y^2$: puis on rajoute les plans d'équations $z = 2$ et $y = 0$.



IV. Exercice

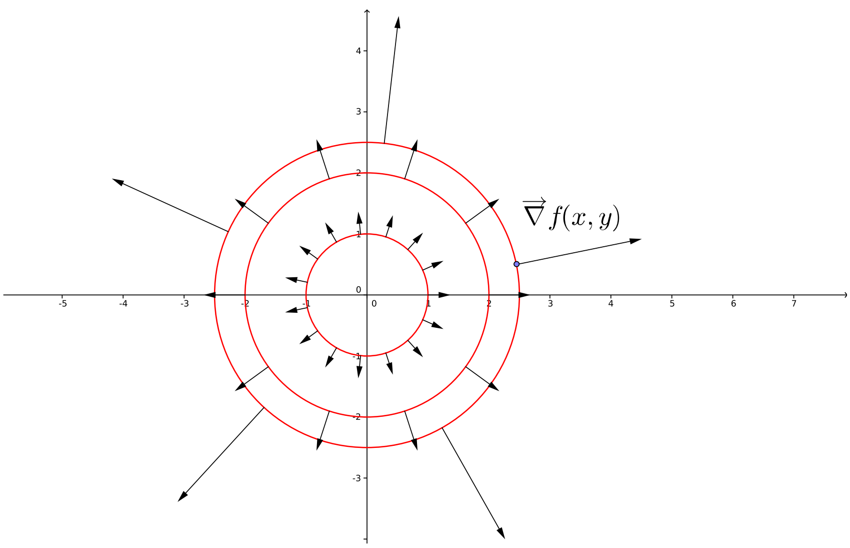
a. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

b. Le calcul donne :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = 2e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

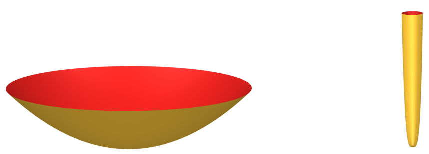
c. Par définition, les points critiques de f sont les lieux où son gradient est nul. D'après la question précédente, f a pour seul point critique $(0, 0)$.

d. Observons que $f(x, y) = \exp(g(x, y))$ avec $g(x, y) = x^2 + y^2$. Puisque la fonction exponentielle réalise une bijection de l'ensemble $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^\times$, les lignes de niveaux de f sont données par les lignes de niveaux de g, qui sont (par définition) des cercles centrés en l'origine. Ci-dessous quelques lignes de niveau, et le gradient en quelques points (attention, le dessin n'est pas à l'échelle et sert seulement à fixer les idées) :



e. Il s'agit de la courbe d'équation $z = e^{y^2}$.

f. Voici l'allure de S, vue de près autour de $(0, 0, 1)$ et vue de loin :



g. Le plan tangent au point situé au-dessus de $(0, 0)$ est horizontal, parce que $(0, 0)$ est un point critique pour la fonction f ; son équation est $z = 1$. Pour calculer l'équation du plan tangent $T_M S$ à S au point $M = (1, 1, e^{1+1}) = (1, 1, e^2)$ on procède comme suit : d'après la formule du cours page 25, une équation de $T_M S$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) - (z - e^2) = 0,$$

soit encore, en utilisant l'expression du gradient déjà calculée,

$$2e^2(x+y) - 3e^2 - z = 0.$$

V. Exercice

a. La fonction f est définie pour l'ensemble des (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \neq 4$, c'est-à-dire partout sauf sur le cercle $\mathcal{C}(O, 2)$ de rayon 2 centré en l'origine.

b. Le calcul donne

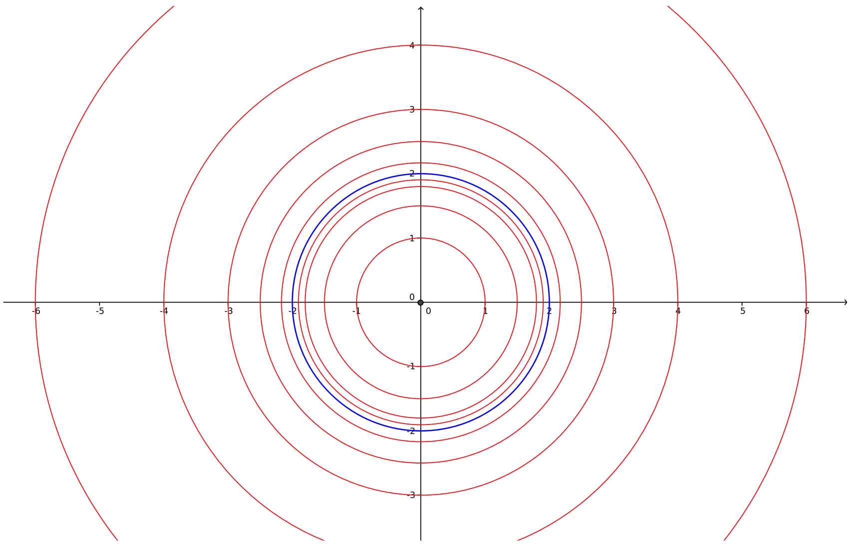
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2x}{(x^2+y^2-4)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2y}{(x^2+y^2-4)^2},\end{aligned}$$

donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}(O, 2)$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{-2}{(x^2+y^2-4)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c. Comme dans l'exercice précédent, on trouve comme unique point critique $(0, 0)$.

d. Voici l'allure des lignes de niveau de f. Le cercle bleu est exclu du domaine de définition.



Le gradient n'est pas figuré ; il est orthogonal aux lignes niveaux, dirigigé vers l'extérieur, et d'autant plus grand que l'on s'approche du cercle bleu.

e. Il s'agit de la courbe d'équation $z = \frac{1}{y^2-4}$.

f. Voici trois vues de S : près de $(0, 0, -1/4)$, à distance moyenne (un peu plus grande que 2) et vue de loin :

g. De même que dans l'exercice précédent, le plan tangent au point $(0,0,-1/4)$ est horizontal et son équation est $z=-1/4$. Le point $(1,1)$ est encore bien dans le domaine de définition, on procède comme dans l'exercice précédent : après simplification, l'équation du plan tangent est

$$x+y+2z=0.$$

Troisième partie

S3 : maths pour la physique

Merci à H. Lavenant qui a corrigé certaines de mes corrections...

TD V. Intégrale curviligne

I. Exercice

a. Soit C^+ le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_{C^+}(2+x2y)ds$.

b. Soit C^+ l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ parcouru du point de coordonnées $(0,0)$ au point $(1,1)$. Calculer $\int_{C^+} 2xds$.

a. Soit θ le paramètre d'angle ; θ varie entre 0 et π, et « $ds = (\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta = 1d\theta$ » donc

$$\int_{C^+}(2+x^2y)ds = \int_0^\pi (2+\cos^2\theta\sin\theta)d\theta = 2\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on remarque que $-3\cos^2\theta\sin\theta = u'(\theta)$, où $u(\theta) = \cos^3(\theta)$, donc

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\frac{1}{3}\left[\cos^3(\theta)\right]_0^\pi = 2/3.$$

En reportant ceci dans l'équation précédente, $\int_{C^+}(2+x^2y)ds = 2\pi + 2/3$.

b. C^+ est un graphe de la fonction $g(x) = x$, on le paramètre par la variable x. L'élément de longueur s'exprime « $ds = \sqrt{1+g'(x)^2}dx$ » soit

$$\int_{C^+} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left[(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

II. Exercice

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

a.
$$\int_C xyds, C : \begin{cases} x(t) & = \cos(t) \\ y(t) & = 3\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0;\pi].$$

b.
$$\int_C (xy+x^2)ds, C : \begin{cases} x(t) & = \cos(t) \\ y(t) & = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0;\pi].$$

c.
$$\int_C \frac{2x^2+x+y}{2+x}ds, C : y = 2x+1,\ x \in [0;1].$$

a. C est une demi-ellipse, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ est telle que $f(-x,y) = -f(x,y)$. Donc $\int_C xyds = -\int_C xyds$, donc $\int_C xyds = 0$. Confirmons ceci par le calcul :

$$\int_C xyds = \int_0^\pi 3\cos t\sin t\sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt = \int_0^\pi 3\cos t\sin t\sqrt{1+8\cos^2 t}dt$$
$$= -\frac{3}{16}\left[\left(1+8\cos^2 t\right)^{3/2}\right]_0^\pi = 0.$$

b. Par l'argument évoqué à la question précédente, $\int_C (xy + x^2)ds = \int_C x^2 ds$, et donc

$$\int_C (xy + x^2)ds = \int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

c. Ici C est parcourue à vitesse constante « $ds = \sqrt{1+4}$ ». On effectue la division euclidienne de $2x^2 + x + 2x + 1$ par $x + 2$:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2x(x+2) - x + 1 \\ &= (2x-1)(x+2) + 3, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_C \frac{2x^2 + x + y}{2+x} ds = \sqrt{5} \int_0^1 (2x-1)dx + 3\sqrt{5} \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = 3\sqrt{5}\ln(3/2).$$

III. Exercice

Déterminer les longueurs des courbes suivantes :

a.
$$\begin{cases} x(t) &= t^2/2 \\ y(t) &= \frac{1}{6}(4t+4)^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0;2].$$

b.
$$\begin{cases} x(t) &= e^t(\sin(t) + \cos(t)) \\ y(t) &= e^t(\sin(t) - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0;\pi/2].$$

a. Calculons « le ds » :

$$\forall t \in [0,2],\ x'(t)^2 + y'(t)^2 = t^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot (4t+4)^{1/2}\right)^2 = t^2 + 4t + 4.$$

Donc

$$\text{longueur}(C) = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 4t + 4} dt = \int_0^2 |t+2| dt = \int_0^2 (t+2)dt = 6.$$

b. Calculons :

$$\begin{cases} x'(t) = e^t\,(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t)\,dt = 2e^t \cos t \\ y'(t) = e^t\,(\sin t + \cos t - \cos t + \sin t)\,dt = 2e^t \sin t, \end{cases}$$

d'où $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 2e^t$. Donc

$$\text{longueur}(C) = 2\int_0^{\pi/2} e^t dt = 2(e^\pi - 1).$$

Remarque 10. Si l'on pose comme en éléctrocinétique $z(t) = x(t) + jy(t)$, alors $z(t) = (1+j)e^{jt}$, ce qui simplifie un peu le calcul du ds : c'est la vitesse $|z'(t)|$.

TD VI. Intégrale de surface

I. Exercice

Déterminer pour chacun des changements de variables (coordonnées) suivants le déterminant jacobien et en déduire les « élément différentiels associés » :

a. polaire :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta), \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; 2\pi[$.

b. cylindrique :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z, \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$.

c. sphérique :

$$\begin{cases} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta), \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta \in [0; \pi[$, $\phi \in [0; 2\pi[$.

a. On note $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y)$. Alors le déterminant jacobien de Φ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Ceci explique l'apparition de r dans la formule « $dxdy = rd\theta$ ».

b. On note $\Psi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) = (x, y, z)$. Alors le déterminant jacobien de Ψ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r,$$

par développement suivant la dernière colonne.

c. On note $\Xi(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) = (x, y, z)$. Alors le déterminant jacobien de Ξ est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi.$$

II. Exercice

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Calculer

$$\iiint_{\mathcal{B}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées sphérique, la boule unité $\mathcal{B}$ est décrite par le domaine

$$\mathcal{P} = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},$$

et d'après le théorème de Fubini sur pavé, en notant $\mathcal{P}_0 = \{[0, 2\pi] \times [0, \pi]\}$,

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{B}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\mathcal{P}} e^{r^3} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^1 r^2 e^{r^3} \iint_{\mathcal{P}_0} \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi\left[\frac{e^{r^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{4\pi(e-1)}{3}.\end{aligned}$$

Remarque 11. On peut remarquer que $\iint_{\mathcal{P}_0} \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ est (par définition) l'aire de la sphère de rayon 1.

III. Exercice

a. Déterminer l'air de la calotte sphérique d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 4 \\ z & \geqslant 1. \end{cases}$$

b. Soit Σ la surface (graphe) d'équation $z = g(x, y)$ pour $(x, y) \in D$ où $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $D = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. Tracer Σ et calculer $\iint x^2 z \mathrm{d}S$.

a. Appelons Γ la calotte sphérique. Il s'agit bien d'une calotte sphérique : c'est l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (de rayon 2, centrée en $(0, 0, 0)$) et du demi-plan d'équation $z \geqslant 1$. Nous voulons calculer Aire(Γ), c'est-à-dire l'intégrale de 1 sur Γ. Pour cela on décrit Γ comme un graphe, celui de la fonction

$$g : \begin{cases} D & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \end{cases}$$

où D est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ (la projection de Γ sur le plan Oxy). A présent d'après le cours page 11,

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(\Gamma) &= \iint_D 1 \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Observons que la quantité $x^2 - y^2$ et le domaine D sont invariants par rotation (de même que Γ était invariante par rotation autour de l'axe Oz). Ceci invite à effectuer un changement de variables polaires,

$$\mathrm{Aire}(\Gamma) = \iint_R \sqrt{\frac{4}{4 - r^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

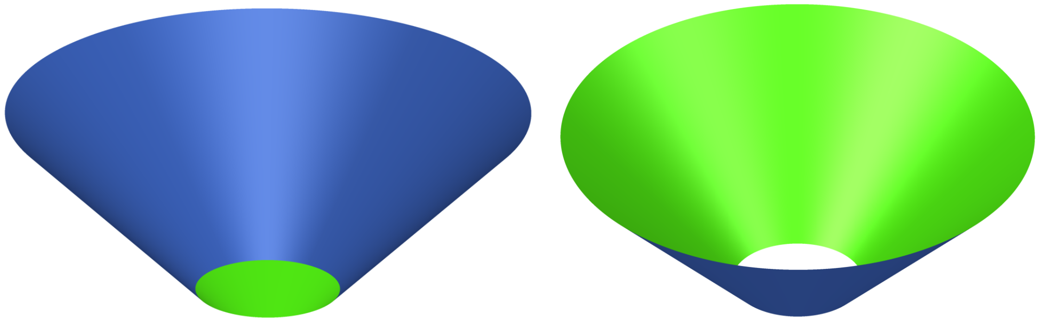


FIGURE 5 – Surface Σ de l'exercice III(vue de dessous, de dessus).

où R est le rectangle $\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Finalement d'après le théorème de Fubini sur un pavé,

$$\text{Aire}(\Gamma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4r^2}{4-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi\left[2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 4\pi.$$

... Et d'après Mahindan pour la primitive.

Remarque 12. Si $\overline{\Gamma}$ est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=4$, alors par la formule bien connue [12] $\text{Aire}(\overline{\Gamma}) = 4\pi\times 2^2 = 16\pi$. L'aire d'une demi-sphère est 8π. C'est compatible avec notre calcul, car la calotte Γ est contenue dans une demi-sphère (donc d'aire plus petite).

b. Σ est un morceau de cône de révolution d'axe Oz, voir la figure 5. Les sections par des plans d'équation $z=$ cste sont des cercles (ou vides), les sections par des plans d'équation $z=$ cste sont des morceaux d'hyperboles.
D'après la formule du cours,

$$\int_\Sigma x^2z\,dS = \iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Le calcul donne ici $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2=1$ (Géométriquement, c'est le carré de la norme du gradient, la plus grande pente, qui est égal à 1). Après passage aux coordonnées polaires, puis application du théorème de Fubini sur domaine rectangle,

$$\int_\Sigma x^2z\,dS = \sqrt{2}\iint_R \left(r^2\cos^2\theta\right) r\cdot r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_1^4 r^4\,dr$$
$$= \sqrt{2}\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4 = \frac{(4^5-1)\sqrt{2}\pi}{5} = \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5}.$$

IV. Exercice

a. Calculer $\iint_\Sigma x^2yz\,dS$ où Σ est la portion du plan d'équation $z=1+2x+3y$ qui se situe au-dessus du rectangle $[0;3]\times[0;2]$.

b. Calculer $\iint_\Sigma y\,dS$ où Σ est le graphe de la fonction $z=\frac{2}{3}\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)$ sur le domaine défini par $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$.

12. L'expression du volume de la boule et de l'aire de la sphère sont attribuables à Archimède (287 – 212 av. J.-C.), qui y a consacré *De la sphère et du cylindre*. Il aurait été si fier de ce résultat qu'il aurait demandé que celui-ci soit gravé sur sa tombe.

a. On commence par calculer le « dS ». Définissons $g(x, y) = 1+2x+3y$. Alors $\partial g/\partial x = 2$ et $\partial g/\partial y = 3$, donc après application du théorème de Fubini sur rectangle,

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma x^2 yz\,dS &= \sqrt{1+2^2+3^2}\int_0^3 x^2\left(\int_0^2 y(1+2x+3y)dy\right)dx \\
&= \sqrt{14}\int_0^3 x^2\left(2+4x+3\cdot 2^3/3\right)dx \\
&= \sqrt{14}\left(\frac{2}{3}3^3+3^4+\frac{8}{3}3^3\right)dx = 171\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

b. Définissons $g(x, y) = (2/3)\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)$. Alors $\partial g/\partial x = \sqrt{x}$ et $\partial g/\partial y = \sqrt{y}$, donc si $\square$ désigne le carré $[0, 1]^2$,

$$\iint_\Sigma y\,dS = \iint_\square y\sqrt{1+x+y}\,dx\,dy.$$

Posons pour tout $y \in [0, 1]$, $I_y = \int_0^1 \sqrt{1+x+y}\,dx$. Alors par primitivation directe,

$$I_y = \frac{2}{3}\left((2+y)^{3/2}-(1+y)^{3/2}\right).$$

D'après le théorème de Fubini sur rectangle,

$$\iint_\square y\sqrt{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 yI_y\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (y(2+y)^{3/2}-y(1+y)^{3/2})dy.$$

On va calculer $\int_0^1 y(k+y)^{3/2}$ pour k positif par intégration par parties, et puis on remplacera k par 1 puis 2. Allons-y :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(k+y)^{3/2}dy &= \left[\frac{2}{5}y(k+y)^{5/2}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 (k+y)^{5/2}dy \\
&= \frac{2}{5}(k+1)^{5/2} - \frac{4}{35}\left((k+1)^{7/2}-k^{7/2}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\int_0^1 (y(2+y)^{3/2}-y(1+y)^{3/2})dy &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}(3^{5/2}-2^{5/2})-\frac{4}{35}(3^{7/2}-2^{7/2}-2^{7/2}+1^{7/2})\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{2}{5}-\frac{3\cdot 4}{35}\right]3^{5/2}-\left[\frac{2}{5}-\frac{2\cdot 2\cdot 4}{35}\right]2^{5/2}-\frac{4}{35}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2\cdot 9\sqrt{3}}{35}+\frac{2\cdot 4\sqrt{2}}{35}-\frac{4}{35}\right) \\
&= \frac{36\sqrt{3}+16\sqrt{2}-8}{105}.
\end{aligned}$$