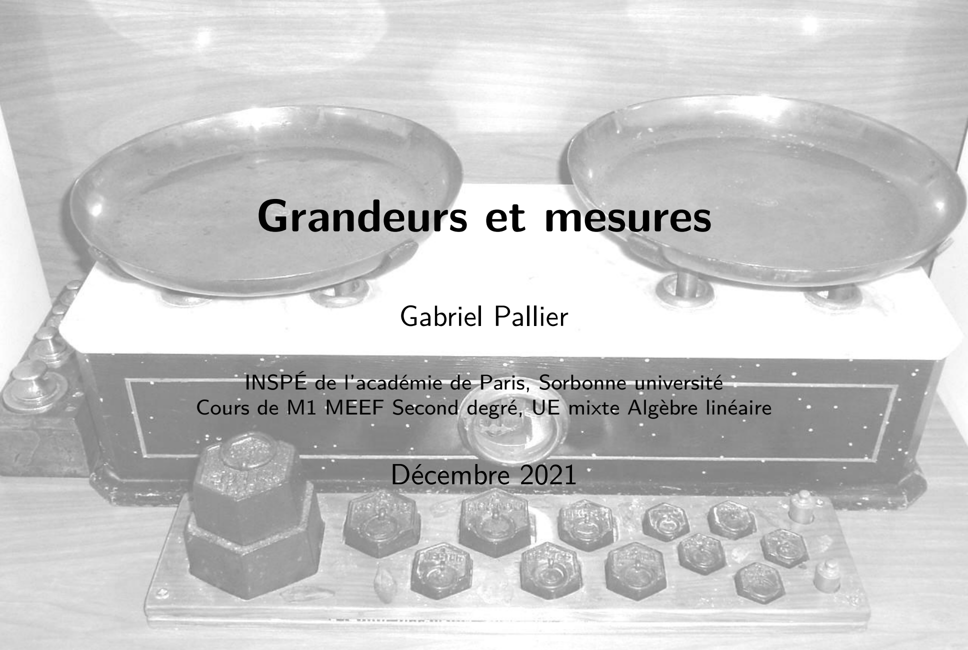


# Grandeurs et mesures

Gabriel Pallier

INSPÉ de l'académie de Paris, Sorbonne université
Cours de M1 MEEF Second degré, UE mixte Algèbre linéaire

Décembre 2021

# Table des matières

# Objectifs

- Différencier grandeur et mesure.

# Objectifs

- Différencier grandeur et mesure.
- Connaître les principales grandeurs et leur introduction dans l'enseignement.

# Objectifs

- Différencier grandeur et mesure.
- Connaître les principales grandeurs et leur introduction dans l'enseignement.
- Revenir sur les propriétés et l'utilité des nombres réels.

# Ce que disent les programmes

# Repères de progressivité (source : Eduscol)

- Au **cycle 2** l'élève travaille sur les grandeurs suivantes : taille des collections, longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit d'associer différentes **grandeurs** à un même objet : sa longueur, sa masse, sa capacité... Mesurer, estimer et utiliser les différentes **unités** permet de faire déjà le lien avec les nombres et les problèmes arithmétiques très simples.

# Repères de progressivité (source : Eduscol)

- Au **cycle 2** l'élève travaille sur les grandeurs suivantes : taille des collections, longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit d'associer différentes **grandeurs** à un même objet : sa longueur, sa masse, sa capacité... Mesurer, estimer et utiliser les différentes **unités** permet de faire déjà le lien avec les nombres et les problèmes arithmétiques très simples.
- Au **cycle 3** (jusqu'en 6ème) s'ajoutent les notions d'aire, de volume et d'angle. L'utilisation des **nombres** et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant des **grandeurs mesurables** (géométriques, physiques, économiques).

# Repères de progressivité (source : Eduscol)

- Au **cycle 2** l'élève travaille sur les grandeurs suivantes : taille des collections, longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit d'associer différentes **grandeurs** à un même objet : sa longueur, sa masse, sa capacité... Mesurer, estimer et utiliser les différentes **unités** permet de faire déjà le lien avec les nombres et les problèmes arithmétiques très simples.
- Au **cycle 3** (jusqu'en 6ème) s'ajoutent les notions d'aire, de volume et d'angle. L'utilisation des **nombres** et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant des **grandeurs mesurables** (géométriques, physiques, économiques).

On proposera plus loin une définition de ce qui peut être entendu par grandeur mesurable et unité.

# Repères de progressivité (source Eduscol)

- Au **cycle 4** les nouveautés essentielles portent sur les notions de **grandeur produit ou quotient** et l'effet d'un **agrandissement ou d'une réduction** sur les longueurs, les aires ou les volumes.

# Repères de progressivité (source Eduscol)

- Au **cycle 4** les nouveautés essentielles portent sur les notions de **grandeur produit ou quotient** et l'effet d'un **agrandissement ou d'une réduction** sur les longueurs, les aires ou les volumes.
- Néanmoins, le travail sur les grandeurs vues au cycle 3 doit être poursuivi au travers de la résolution de problèmes en lien avec la plupart des thèmes au programme. C'est cette fréquentation régulière des grandeurs, des mesures, des unités qui assurera que le concept reste vivant et que les techniques élémentaires sont maîtrisées de manière pérenne.

# Place dans l'enseignement de cycle 4 (Source Eduscol)

*« Le thème « grandeurs et mesures » n'a pas vocation à être travaillé seul mais au service de la résolution de problèmes. Il permet d'aborder une diversité de situations qui relèvent d'autres parties du programme : calcul numérique, calcul littéral, équations, fonctions, géométrie. L'attendu de fin de cycle « mobiliser la proportionnalité pour résoudre un problème » y est fortement travaillé.* »

**Savoir-faire travaillés**

- Manipuler et interpréter des grandeurs.
- Comparer des grandeurs.
- Mesurer.
- Référer à des formules et calculer.
- Référer à des unités et effectuer des changements d'unités [Conversions].

# Doit-on laisser les unités dans les calculs ?

- Dans un calcul de la mesure d'une grandeur, une pratique consiste à n'écrire les unités qu'à la fin d'un calcul, par exemple il est commun de lire « le périmètre du rectangle ABCD est de $2 \times (3+5) = 16\,\text{cm}$. »
- Le document ressource mentionne toutefois que *l'utilisation des unités dans les égalités et les calculs est légitime. Elle permet un contrôle de l'unité finale (évitant par exemple des confusions entre périmètre et aire ou des erreurs de formules dans le cadre des vitesses) ; elle peut aussi être une aide dans les changements d'unités. On privilégiera les écritures du type*

$$P = 2 \times (3\,\text{cm} + 5\,\text{cm}) = 2 \times 8\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$$

*pour le calcul de la mesure d'un périmètre et*

$$A = \frac{4\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}}{2} = \frac{24\,\text{cm}^2}{2} = 12\,\text{cm}^2$$

*pour le calcul de la mesure d'une aire.*

# De la grandeur à la mesure

# De la grandeur à la mesure

- Nous donnons ici une approche axiomatique de la notion de grandeur. Il s'agit cependant là d'une construction *a posteriori*.
- La définition de grandeur mesurable qu'on apporte ici a les avantages et les inconvénients d'une définition par les axiomes. Elle est parfois trop restrictive. Cette approche permet de concevoir un cadre commun à l'enseignement des grandeurs, même si toutes ne corresponderont pas strictement aux axiomes.
- Nous devons lire cette définition en oubliant momentanément que les grandeurs se rapportent à des nombres via des mesures.

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;
- $\forall x, y \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \implies \exists z : x \oplus z = y$ ;

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;
- $\forall x, y \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \implies \exists z : x \oplus z = y$ ;
- $\forall x \in \mathsf{G}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists y \in \mathsf{G}, x = \underbrace{y \oplus \cdots \oplus y}_{n \text{ fois}}$. On note $x = ny$.

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathrm{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathrm{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;
- $\forall x, y \in \mathrm{G}$, $x \preccurlyeq y \implies \exists z : x \oplus z = y$ ;
- $\forall x \in \mathrm{G}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists y \in \mathrm{G}, x = \underbrace{y \oplus \cdots \oplus y}_{n \text{ fois}}$. On note $x = ny$.
- $\forall x \in \mathrm{G}$, $0 \prec x \implies \forall y \in \mathrm{G}, \exists n \in \mathbf{N}^*, y \preccurlyeq nx$. « Donnez-moi un levier et je soulèverai le monde ».

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathrm{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathrm{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;
- $\forall x, y \in \mathrm{G}$, $x \preccurlyeq y \implies \exists z : x \oplus z = y$ ;
- $\forall x \in \mathrm{G}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists y \in \mathrm{G}, x = \underbrace{y \oplus \cdots \oplus y}_{n \text{ fois}}$. On note $x = ny$.
- $\forall x \in \mathrm{G}$, $0 \prec x \implies \forall y \in \mathrm{G}, \exists n \in \mathbf{N}^*, y \preccurlyeq nx$. « Donnez-moi un levier et je soulèverai le monde ».
- Tout sous-ensemble majoré de $(\mathrm{G}, \preccurlyeq)$ admet une **borne supérieure.**

# Grandeur mesurable : une approche axiomatique

## Définition

Une **grandeur mesurable** sur un ensemble d'**objets** $\mathcal{O}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{O}$ vers un ensemble totalement ordonné $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ muni d'une loi de composition interne associative et commutative $\oplus$ tel que

- G possède un élément noté $\mathbf{0}$, neutre pour $\oplus$ et minimal pour $\preccurlyeq$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \iff x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$ ;
- $\forall x, y \in \mathsf{G}$, $x \preccurlyeq y \implies \exists z : x \oplus z = y$ ;
- $\forall x \in \mathsf{G}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists y \in \mathsf{G}, x = \underbrace{y \oplus \cdots \oplus y}_{n \text{ fois}}$. On note $x = ny$.
- $\forall x \in \mathsf{G}$, $0 \prec x \implies \forall y \in \mathsf{G}, \exists n \in \mathbf{N}^*, y \preccurlyeq nx$. « Donnez-moi un levier et je soulèverai le monde ».
- Tout sous-ensemble majoré de $(\mathsf{G}, \preccurlyeq)$ admet une **borne supérieure.**

On conviendra que G n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$. On parlera aussi de grandeur mesurable pour désigner un élément de G, même si c'est un abus.

# Grandeur mesurable, exemples et non-exemples

## Exemples internes aux mathématiques

En géométrie euclidienne (on y reviendra dans les exercices) : longueur des segments, périmètre des polygones, aire des polygones, plus petit volume d'un ellipsoide contenant un solide, angles non orientés des secteurs angulaires du plan.

# Grandeur mesurable, exemples et non-exemples

## Exemples internes aux mathématiques

En géométrie euclidienne (on y reviendra dans les exercices) : longueur des segments, périmètre des polygones, aire des polygones, plus petit volume d'un ellipsoide contenant un solide, angles non orientés des secteurs angulaires du plan.

## Exemples externes aux mathématiques

Dans le cadre d'une modélisation : la masse, l'énergie (en mécanique classique), la durée d'un phénomène.

- La charge électrique n'est pas une grandeur mesurable, car la charge nulle n'est pas minimale. On parle cependant de **grandeur repérable**.
- Le **cardinal** n'est pas une grandeur mesurable. Cependant les grands cardinaux finis se comportent comme une grandeur, et sont parfois traités comme tels (on dira par exemple : « la moitié de la population française est vaccinée »).

# Remarques

- On appelle G **type de grandeur** ou **espèce de grandeur**.
- On ne demande pas que $g(\mathcal{O}) = \mathsf{G}$.
- Étant donné des grandeurs mesurables sur une même collection d'objets $\mathcal{O}$, on peut former des grandeurs **inverses** et **produits**

$$\text{vitesse} \equiv \text{longueur} \otimes \text{durée}^{-1}$$

$$\text{énergie} \equiv \text{masse} \otimes \text{longueur}^2 \otimes \text{durée}^{-2}$$

Attention, cette écriture est plus subtile qu'elle n'en a l'air : on parle de grandeurs, pas de nombres. On reviendra sur la construction des grandeurs produits plus loin.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter [1] $\mathcal{O}$ :

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter [1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter [1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.
- Les polygones du plan, où l'on assimile un polygone à son intérieur : E est le plan euclidien.

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter[1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.
- Les polygones du plan, où l'on assimile un polygone à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les secteurs angulaires du plan, où l'on assimile un secteur angulaire à son intérieur : E est le plan euclidien.

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter[1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.
- Les polygones du plan, où l'on assimile un polygone à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les secteurs angulaires du plan, où l'on assimile un secteur angulaire à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les sous-populations de la population française : E est la population de la France

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter [1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.
- Les polygones du plan, où l'on assimile un polygone à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les secteurs angulaires du plan, où l'on assimile un secteur angulaire à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les sous-populations de la population française : E est la population de la France
- Les durées : E est « le cours du temps ».

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Monotonie

On suppose ici que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble. C'est souvent le cas dans les exemples précédents, parfois quitte à réinterpréter [1] $\mathcal{O}$ :

- Les segments du plan euclidien : E est le plan euclidien.
- Les polygones du plan, où l'on assimile un polygone à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les secteurs angulaires du plan, où l'on assimile un secteur angulaire à son intérieur : E est le plan euclidien.
- Les sous-populations de la population française : E est la population de la France
- Les durées : E est « le cours du temps ».

Dans ce cas, on demande usuellement :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \alpha \subseteq \beta \implies \boldsymbol{g}(\alpha) \preccurlyeq \boldsymbol{g}(\beta).$$

Notion ordinaire d'Euclide « Le tout est plus grand que la partie. »

1. La « vision ensembliste » est la nôtre, mais on doit prendre garde à ne pas trop la projeter sur les élèves en cours d'apprentissage.

# Invariance

Parfois, l'ensemble d'objets $\mathcal{O}$ vient avec une **relation d'équivalence** naturelle. Voici quelques exemples.

| **Objets** | **Relation d'équivalence** |
|---|---|
| Segments du plan | Superposabilité |
| Secteurs angulaires | Superposabilité |
| Phénomènes physiques | Translation dans le temps |

Si $g : \mathcal{O} \to \mathrm{G}$ est une grandeur, on demande alors que $g(\alpha) = g(\beta)$ chaque fois que $\alpha$ et $\beta$ sont équivalents.

# Invariance

Parfois, l'ensemble d'objets $\mathcal{O}$ vient avec une **relation d'équivalence** naturelle. Voici quelques exemples.

| Objets | Relation d'équivalence |
| --- | --- |
| Segments du plan | Superposabilité |
| Secteurs angulaires | Superposabilité |
| Phénomènes physiques | Translation dans le temps |

Si $g : \mathcal{O} \to \mathsf{G}$ est une grandeur, on demande alors que $g(\alpha) = g(\beta)$ chaque fois que $\alpha$ et $\beta$ sont équivalents.
Dans le cas où $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathsf{E})$, cette invariance s'interprète en général par la donnée d'un **groupe de transformations de** E.

| Objets | Grandeur | Groupe |
| --- | --- | --- |
| Polygones du plan | Périmètre | Isométries[2] affines = Déplacements |
| Polygones du plan | Aire | $\langle$Déplacements, transvections[3]$\rangle$ |
| Secteurs angulaires | Angle | Similitudes |

1. On reviendra sur la terminologie. Ici nous préférons « Déplacements ».
2. Voir plus loin.

# Additivité

On se place ici dans le cas $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble, et on suppose que $\mathcal{O}$ est stable par union finie et par différence.
On dit alors que $g : \mathcal{O} \to \mathrm{G}$ est **simplement additive** si pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, $g(\alpha \sqcup \beta) = g(\alpha) \oplus g(\beta)$.

**Exemple : Aire des domaines quarrables du plan**

Soit E le plan euclidien et $\mathcal{O}$ l'ensemble des unions finies de polygones muni de la mesure d'aire $g$. On dit qu'un domaine $P \subset \mathrm{E}$ est quarrable si

$$\sup_{p^- \in \mathcal{O}, p \subseteq P} g(p^-) = \inf_{p^+ \in \mathcal{O}, p \supseteq P} g(p^+).$$

On peut alors étendre $g$ à l'ensemble $\mathcal{Q}$ des domaines quarrables. Elle est simplement additive, monotone et invariante par translation.
(On peut montrer que $P$ est quarrable si et seulement si son indicatrice est Riemann-intégrable).

# Produit de grandeurs mesurables

***Les trois diapositives qui suivent sont abstraites et la suite du cours les rendra désuètes. Elles sont cependant nécessaires pour la cohérence de notre propos.***

Soit $\mathcal{O}$ une collection d'objets. Soient $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ deux espèces de grandeur, et pour $i \in \{1, 2\}$, $g_i \colon \mathcal{O} \to \mathsf{G}_i$ une grandeur mesurable. On pose

$$G_1 \otimes G_2 := \{x_1 \otimes x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\} / \sim$$

où

$$x_1 \otimes x_2 \sim x_1' \otimes x_2' \iff \begin{cases} (x_1 = \mathbf{0} \text{ ou } x_2 = \mathbf{0}) \text{ et } (x_1' = \mathbf{0} \text{ ou } x_2' = \mathbf{0}) & \text{ou} \\ \forall n, m \in \mathbf{N}^*, n x_1 \preccurlyeq m x_1' \iff n x_2' \preccurlyeq m x_2 \end{cases}$$

et

$$[x_1 \otimes x_2] \prec [x_1' \otimes x_2'] \iff \exists n, m \in \mathbf{N}^*, \begin{cases} n x_1 \prec m x_1' \text{ et } m x_2 \preccurlyeq n x_2' & \text{ou} \\ n x_1 \preccurlyeq m x_1' \text{ et } n x_2 \prec n x_2'. \end{cases}$$

**Définition (produit de grandeurs mesurables)**

$\forall \alpha \in \mathcal{O},\ g_1 \otimes g_2(\alpha) := g_1(\alpha) \otimes g_2(\alpha).$

# Grandeur mesurable quotient

Avec les mêmes données, on pose

$G_1 \oslash G_2 := \{x_1 \oslash x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2 \setminus \{\mathbf{0}\}\} \,/\, \sim$ où

$$x_1 \oslash x_2 \sim x_1' \oslash x_2' \iff \begin{cases} (x_1 = \mathbf{0} \text{ et } x_1' = \mathbf{0}) & \text{ou} \\ \forall n, m \in \mathbf{N}^*, nx_1 \preccurlyeq mx_1' \iff nx_2 \preccurlyeq mx_2' \end{cases}$$

et

$$[x_1 \oslash x_2] \prec [x_1' \oslash x_2'] \iff \exists n, m \in \mathbf{N}^*, \begin{cases} nx_1 \prec mx_1' \text{ et } mx_2 \succcurlyeq nx_2' & \text{ou} \\ nx_1 \preccurlyeq mx_1' \text{ et } nx_2 \succ nx_2'. \end{cases}$$

# Grandeur mesurable quotient

Avec les mêmes données, on pose

$G_1 \oslash G_2 := \{x_1 \oslash x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2 \setminus \{\mathbf{0}\}\} \,/ \sim$ où

$$x_1 \oslash x_2 \sim x_1' \oslash x_2' \iff \begin{cases} (x_1 = \mathbf{0} \text{ et } x_1' = \mathbf{0}) & \text{ou} \\ \forall n, m \in \mathbf{N}^*, nx_1 \preccurlyeq mx_1' \iff nx_2 \preccurlyeq mx_2' \end{cases}$$

et

$$[x_1 \oslash x_2] \prec [x_1' \oslash x_2'] \iff \exists n, m \in \mathbf{N}^*, \begin{cases} nx_1 \prec mx_1' \text{ et } mx_2 \succcurlyeq nx_2' & \text{ou} \\ nx_1 \preccurlyeq mx_1' \text{ et } nx_2 \succ nx_2'. \end{cases}$$

**Définition (quotient de grandeurs mesurables)**

$\forall \alpha \in \mathcal{O},\ g_2(\alpha) \neq \mathbf{0},\ g_1 \oslash g_2(\alpha) := g_1(\alpha) \oslash g_2(\alpha).$

# Grandeur mesurable quotient

Avec les mêmes données, on pose

$G_1 \oslash G_2 := \{x_1 \oslash x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2 \setminus \{\mathbf{0}\}\} / \sim$ où

$$x_1 \oslash x_2 \sim x_1' \oslash x_2' \iff \begin{cases} (x_1 = \mathbf{0} \text{ et } x_1' = \mathbf{0}) & \text{ou} \\ \forall n, m \in \mathbf{N}^*, nx_1 \preccurlyeq mx_1' \iff nx_2 \preccurlyeq mx_2' \end{cases}$$

et

$$[x_1 \oslash x_2] \prec [x_1' \oslash x_2'] \iff \exists n, m \in \mathbf{N}^*, \begin{cases} nx_1 \prec mx_1' \text{ et } mx_2 \succcurlyeq nx_2' & \text{ou} \\ nx_1 \preccurlyeq mx_1' \text{ et } nx_2 \succ nx_2'. \end{cases}$$

**Définition (quotient de grandeurs mesurables)**

$\forall \alpha \in \mathcal{O}$, $g_2(\alpha) \neq \mathbf{0}$, $g_1 \oslash g_2(\alpha) := g_1(\alpha) \oslash g_2(\alpha)$.

**Exercice**

L'escargot mange 3 feuilles de laitue en 5 jours et la limace, 5 feuilles de laitue en 8 jours. Qui mange le plus vite ?

# Grandeur mesurable quotient

Avec les mêmes données, on pose

$G_1 \oslash G_2 := \{x_1 \oslash x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2 \setminus \{\mathbf{0}\}\} \,/ \sim$ où

$$x_1 \oslash x_2 \sim x_1' \oslash x_2' \iff \begin{cases} (x_1 = \mathbf{0} \text{ et } x_1' = \mathbf{0}) & \text{ou} \\ \forall n, m \in \mathbf{N}^*, nx_1 \preccurlyeq mx_1' \iff nx_2 \preccurlyeq mx_2' \end{cases}$$

et

$$[x_1 \oslash x_2] \prec [x_1' \oslash x_2'] \iff \exists n, m \in \mathbf{N}^*, \begin{cases} nx_1 \prec mx_1' \text{ et } mx_2 \succcurlyeq nx_2' & \text{ou} \\ nx_1 \preccurlyeq mx_1' \text{ et } nx_2 \succ nx_2'. \end{cases}$$

## Définition (quotient de grandeurs mesurables)

$\forall \alpha \in \mathcal{O},\ g_2(\alpha) \neq \mathbf{0},\ g_1 \oslash g_2(\alpha) := g_1(\alpha) \oslash g_2(\alpha).$

## Exercice

L'escargot mange 3 feuilles de laitue en 5 jours et la limace, 5 feuilles de laitue en 8 jours. Qui mange le plus vite ?

La limace, car $8 \cdot 3\,\text{laitues} \prec 5 \cdot 5\,\text{laitues}$ et $8 \cdot 5\,\text{jours} \succcurlyeq 5 \cdot 8\,\text{jours}$ !

# Grandeur mesurable inverse

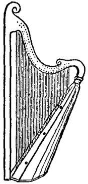
***Point de vue temporaire***

Soient $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ deux espèces de grandeur, et pour $i \in \{1, 2\}$, $g_i \colon \mathcal{O} \to \mathsf{G}_i$ une grandeur mesurable. On dit que $g_1$ et $g_2$ sont inverses l'une de l'autre (sur $\mathcal{O}$), ce que l'on note $g_1 \equiv g_2^{-1}$, si la grandeur $g_1 \otimes g_2$ est constante sur

$$\{\alpha \in \mathcal{O} : g_1(\alpha) \neq \mathbf{0},\ g_2(\alpha) \neq \mathbf{0}\}.$$

**Exemple : Période et fréquence**

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des cordes d'une harpe, $p$ qui à une corde associe sa fréquence fondamentale (la plus basse), et $\theta$ qui a une corde associe sa plus haute période. Alors $p \equiv \theta^{-1}$.



Il est alors légitime de poser $g \otimes h^{-1} := g \oslash h$, ce qui n'avait pas de sens a priori.

# « Analyse dimensionnelle » et lois physiques

## Exemple

Soit $\mathcal{O}$ un ensemble de pendules simples, répartis sur un ensemble de planètes où l'accélération de la gravité est donné par la grandeur $g$. Si $l$ est la grandeur longueur de la corde, et $\theta$ la période du pendule, le principe de conservation de l'énergie potentielle nous dit que

$$\theta^2 \equiv l \otimes g^{-1} \text{ ou } p^2 \equiv l^{-1} \otimes g.$$

# « Analyse dimensionnelle » et lois physiques

**Exemple**

Soit $\mathcal{O}$ un ensemble de pendules simples, répartis sur un ensemble de planètes où l'accélération de la gravité est donné par la grandeur $g$. Si $l$ est la grandeur longueur de la corde, et $\theta$ la période du pendule, le principe de conservation de l'énergie potentielle nous dit que

$$\theta^2 \equiv l \otimes g^{-1} \text{ ou } p^2 \equiv l^{-1} \otimes g.$$

On écrira

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\ell/g}.$$

Pour la physicienne, la formule précédente est une égalité **entre grandeurs**, pas seulement une égalité entre nombres. Le système SI désigne sept types de grandeurs de base : longueur, masse, durée, intensité électrique, température thermodynamique, quantité de matière, intensité lumineuse.

# Unité, nombres réels, et mesure

Étant donné un type de grandeur G, se donner une unité, c'est choisir un élément $\mathbf{u}$ de G tel que $\mathbf{0} \prec \mathbf{u}$.

On rappelle (voir notes de cours) que $\mathbf{R}$ est l'unique corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure [4] à unique isomorphisme de corps ordonné près.

**Théorème et définition**

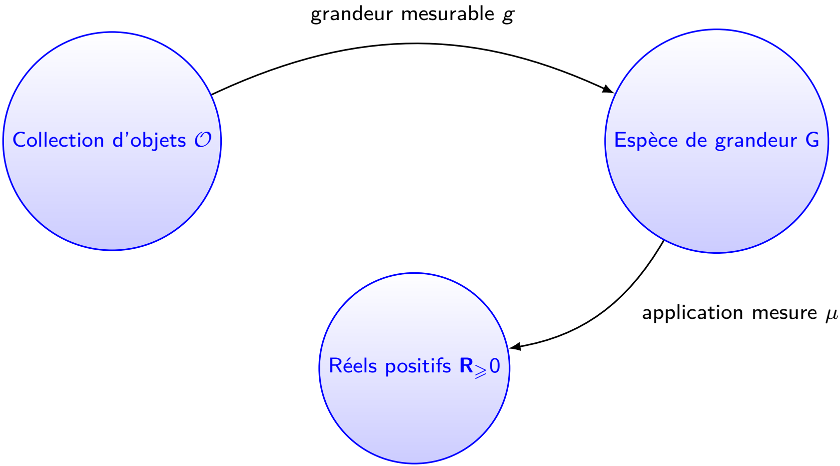
Soit $g : \mathcal{O} \to \mathrm{G}$ une grandeur. Étant donné une unité $\mathbf{u}$ de G, il existe une unique application $\mu : \mathrm{G} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ telle que $\mu(\mathbf{0}) = 0$ et $\mu(\mathbf{u}) = 1$ et qui respecte l'ordre et l'addition. On appelle $\mu$ l'application mesure relativement à $\mathbf{u}$. De plus

- L'application mesure est bijective.
- Deux applications mesures sont proportionnelles.

Etant donné une application mesure, $\mu \circ g : \mathcal{O} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ est l'application « mesure de la grandeur $g$ ».

4. La propriété de la borne supérieure implique l'axiome d'Archimède.

# Récapitulatif




On trouvera également qualifiée de mesure l'application $\mu \circ g : \mathcal{O} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$, ou encore une valeur prise par l'application mesure.

# Sans unité, pas de mesure

D'après Erathostène, la circonférence de la Terre peut être évaluée à 250 000 stades...

# Sans unité, pas de mesure

D'après Erathostène, la circonférence de la Terre peut être évaluée à 250 000 stades... mais la longueur exacte du stade utilisé par Eratosthène nous est inconnue !

# Sans unité, pas de mesure

D'après Erathostène, la circonférence de la Terre peut être évaluée à 250 000 stades... mais la longueur exacte du stade utilisé par Eratosthène nous est inconnue !
Si on suppose qu'il a utilisé le stade égyptien et qu'on évalue celui-ci à environ 157,5 m, on obtient une circonférence de la Terre d'environ 39 375 km, mesure proche de celle admise aujourd'hui.

## Petite histoire du mètre

En 1791, le mètre est défini comme un dix-millionième d'un quart de méridien terrestre. Depuis 1983, cette définition a changé. Le mètre est la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant un 299 792 458$^{\text{ème}}$ de seconde. Une seconde, c'est le temps nécessaire à l'atome de césium pour osciller 9 192 631 770 fois.

# Unités des grandeurs produits et inverse

Soient $g_1$ et $g_2$ deux grandeurs sur une collection $\mathcal{O}$, de type $\mathsf{G}_1$ et $\mathsf{G}_2$. Soient $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux unités de type $\mathsf{G}_1$ et $\mathsf{G}_2$ respectivement. Alors $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ est un élément de $\mathsf{G}_1 \otimes \mathsf{G}_2$ tel que défini précédemment.

**Exemples**

- Kilowatt-heure (de type énergie $\equiv$ puissance $\otimes$ durée)
- Année-lumière (de type distance $\equiv$ durée $\otimes$ vitesse).

La donnée d'une paire de grandeurs mesurables de type $\mathsf{G}_1$ et $\mathsf{G}_2$ inverses l'une de l'autre détermine une mesure **canonique** sur $\mathsf{G}_1 \otimes \mathsf{G}_2$ (l'unité $\mathbf{1}$ est la valeur constante de $g_1 \otimes g_2$). Si donc $\mathbf{u}$ est une unité de $\mathsf{G}_1$, on note $\mathbf{u}^{-1}$ l'unité de $\mathsf{G}_2$ telle que $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{1}$.

**Exemple**

$1\,\mathrm{Hertz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$

# Les unités SI

| Grandeur | Notation | Unité | Notation |
|---|---|---|---|
| Masse | M | kilogramme | kg |
| Durée | T | seconde | s |
| Longueur | L | mètre | m |
| Température | $\Theta$ | kelvin | K |
| Intensité électrique | I | ampère | A |
| Quantité de matière | N | mole | mol |
| Intensité lumineuse | J | candela | cd |

# De la mesure à la grandeur

Soit $\mathcal{O}$ un ensemble d'objets, et $m : \mathcal{O} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ une application.
On considère l'espèce de grandeur

$$\mathsf{G} = \mathcal{O}/\sim$$

où pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, $\alpha \sim \beta$ si $m(\alpha) = m(\beta)$. On dispose de la grandeur

$$g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathsf{G}$$

associée à $m$ par $g(\alpha) = m^{-1}(m(\alpha))$, que l'on note $[\alpha]$.

# De la mesure à la grandeur

Soit $\mathcal{O}$ un ensemble d'objets, et $m : \mathcal{O} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ une application.
On considère l'espèce de grandeur

$$\mathsf{G} = \mathcal{O}/\sim$$

où pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, $\alpha \sim \beta$ si $m(\alpha) = m(\beta)$. On dispose de la grandeur

$$g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathsf{G}$$

associée à $m$ par $g(\alpha) = m^{-1}(m(\alpha))$, que l'on note $[\alpha]$.

**« Reconstruction » du plan euclidien et longueur des segments**

On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien. A toute paire de points $(u, v)$, on associe

$$m(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

On dit que les segments $[uv]$ et $[sw]$ sont de même longueur si $m(u, v) = m(w, s)$.

# Grandeur, mesure et nombres dans l’enseignement

# Étapes d'enseignement

1. Comparer entre objets, développer une notion de la grandeur sans mesure.

# Étapes d'enseignement

1. Comparer entre objets, développer une notion de la grandeur sans mesure.
2. Comparer à une unité de mesure (bandes, étalons, verre, etc.)

# Étapes d'enseignement

1. Comparer entre objets, développer une notion de la grandeur sans mesure.
2. Comparer à une unité de mesure (bandes, étalons, verre, etc.)
3. Introduction des unités officielles, connaître les bonnes unités par grandeur

# Étapes d'enseignement

1. Comparer entre objets, développer une notion de la grandeur sans mesure.
2. Comparer à une unité de mesure (bandes, étalons, verre, etc.)
3. Introduction des unités officielles, connaître les bonnes unités par grandeur
4. Développer des repères, avoir des ordres de grandeur. Idées : calcul mental, conversions d'unités.

# Étapes d'enseignement

1. Comparer entre objets, développer une notion de la grandeur sans mesure.
2. Comparer à une unité de mesure (bandes, étalons, verre, etc.)
3. Introduction des unités officielles, connaître les bonnes unités par grandeur
4. Développer des repères, avoir des ordres de grandeur. Idées : calcul mental, conversions d'unités.

- Dans la fiche d'exercice, voir l'exercice 1 pour la grandeur Angle en classe de 6e.

# Les petits cardinaux sont-ils une grandeur ?

A posteriori, les petits cardinaux ne constituent pas une grandeur au sens axiomatique (il leur manque l'axiome de divisibilité). Rappelons cependant les trois usages des nombres à l'école.

**A.** Ordonner une collection

**B.** Enumérer un ensemble fini

**C.** Mesurer une grandeur.

# Les petits cardinaux sont-ils une grandeur ?

A posteriori, les petits cardinaux ne constituent pas une grandeur au sens axiomatique (il leur manque l'axiome de divisibilité). Rappelons cependant les trois usages des nombres à l'école.

**A.** Ordonner une collection

**B.** Enumérer un ensemble fini

**C.** Mesurer une grandeur.

Dans une certaine mesure, **B** prépare **C**. La question de la divisibilité parmi les entiers apparaît dans les problèmes au cycle 3, ainsi que la numération décimale sous-jacente au système métrique.

# Agrandissement et réduction

**Eduscol**

« L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3e, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès. [...]
Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle [4e], en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles.
Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques. »

## Histoire de l'enseignement des grandeurs (grandes lignes)

# Euclide et les grandeurs

Le traité d'Euclide *Les Éléments* (3e siècle avant J-C), a servi comme référence jusqu'au XIXè siècle. L'ambition était de déduire toutes les propriétés de la géométrie de cinq postulats et cinq notions ordinaires.
On peut considérer qu'Euclide fait un usage extensif de la notion de grandeur ; c'est le terme dont on se sert pour traduire trois de ses notions ordinaires.
Enseigner la notion de grandeur « comme chez Euclide » à supposer que ce soit souhaitable pose plusieurs problèmes de transposition didactique.

- Le texte nous est parvenu, mais le contexte a été en grande partie perdu.
- La théorie elle-même est insuffisante sur plusieurs points. Les axiomes sont insuffisants pour certains cas d'égalité des triangles, par exemple.
- La théorie des nombres réels chez Euclide (Livre IV) n'est pas aboutie.

# L’évolution de la place de la géométrie euclidienne

A partir du XIXème siècle, un renversement de point de vue a lieu dans la recherche mathématique sur la place de la géométrie euclidienne. Notamment,

- La théorie des groupes d’une part, la théorie des invariants d’autre part, prennent de l’ampleur. Dans cette perspective plus large, la géométrie euclidienne apparaît comme un cas particulier.
- On s’aperçoit que derrière la version corrigée des axiomes d’Euclide énoncée par Hilbert, se cache une axiomatisation des nombres réels ; plus largement, à chaque plan affine (vérifiant des axiomes d’incidence) est associé un corps.

Cet ensemble de point de vue modernes gagne en influence sur l’enseignement des mathématiques au début du XXème siècle.

# L’opinion de Lebesgue

# La linéarisation de l'enseignement de la géométrie

**(2.1)** Par définition, un *plan euclidien* est un ensemble E pour lequel on suppose données :

1° une application $(x, y) \to x + y$ de $E \times E$ dans E ;
2° une application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbf{R} \times E$ dans E ;
3° une application $(x, y) \to (x|y)$ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ ;
– vérifiant les conditions suivantes, dites « *axiomes de la géométrie plane euclidienne* » :

(V 1) Pour tout couple $(x, y)$ d'éléments de E, on a $x + y = y + x$.

(V 2) Pour tout triplet $(x, y, z)$ d'éléments de E, on a $x + (y + z) = (x + y) + z$ (élément noté $x + y + z$ ; on pose de même $x + y + z + t = (x + y + z) + t$ pour quatre éléments de E, et de même pour plus de quatre éléments).

(V 3) Il existe un élément $e$ de E tel que, pour tout élément $x$ de E, on ait $e + x = x$.

(V 4) Pour tout élément $x$ de E, il existe un élément $x'$ de E tel que $x + x' = e$.

(V 5) Pour tout couple $(\alpha, \beta)$ de nombres réels et tout élément $x$ de E, on a $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(V 6) Pour tout nombre réel $\alpha$ et tout couple $(x, y)$ d'éléments de E, on a $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(V 7) Pour tout couple $(\alpha, \beta)$ de nombres réels et tout élément $x$ de E on a $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(V 8) Pour tout élément $x$ de E, on a $1x = x$.

Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (1968)

# De nos jours

- On est largement revenus du « tout linéaire », et les grandeurs ont une place prépondérante au début de la géométrie (voir Etapes d'enseignement). Mais on parle aussi très tôt des transformations (symétries axiales, centrales...) qui n'étaient pas là chez Euclide.
- La géométrie du collège est celle d'Euclide-Hilbert, bien que les axiomes ne soient pas explicités (on peut parler de géométrie euclidienne naïve). Il est possible et souhaitable de faire usage de la grandeur Aire en géométrie déductive en Quatrième et Troisième.
- A partir de la Seconde et surtout en Première générale, l'usage des vecteurs en géométrie met en place les fondements des méthodes de l'algèbre linéaire (par exemple la formule du produit scalaire par les coordonnées, bien qu'elle puisse encore être vue comme une propriété à ce stade). La reconstruction du plan euclidien est faite dans l'enseignement supérieur.

# Bibliographie


- Boudjaaba, F., Courty, J.-M., Gaille, M. eds, *De la mesure en toutes choses*, CNRS éditions, Paris, 2021.
- Lebesgue, H., *La mesure des grandeurs*, collection d'articles, réédition Albert Blanchard, 1975.
- Perrin, D. *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*, Cassini, 2011.

- Whitney, H., The mathematics of physical quantities. I. Mathematical models for measurement. *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 115–138
- Whitney, H., The mathematics of physical quantities. II. Quantity structures and dimensional analysis. *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 227-256.

**Merci pour votre attention.**