DEVOIR MAISON D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Modalités. Le DM est à rendre pour le **17 février 2021**.

Il est possible de travailler en binôme. N'oubliez pas d'indiquer dans ce cas les deux noms lisiblement en tête de copie.

Le DM est constitué de deux exercices de longueur comparable.

On trouvera les données utiles pour certaines questions en téléchargeant le fichier à l'adresse

`https://webusers.imj-prg.fr/~gabriel.pallier/DMlin.py`

Il n'est pas nécessaire de l'exécuter ni de disposer d'un interpréteur python pour l'ouvrir, un simple éditeur de texte suffira.

Dans l'exercice 2, pour les questions marquées du signe « ⌨ » vous pouvez utiliser le calculateur de matrices de WIMS en ligne, disponible à l'adresse

`https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/`

ou tout autre logiciel de calcul scientifique de votre choix.

Exercice 1 à propos de PageRank

(A) Résoudre l'exercice ci-contre. (Extrait de *Terminale Mathématiques Expertes Programme 2020*, collection Barbazo, Hachette Presse.)

(B) Donner l'allure de la probabilité invariante π quand $p = 0$ et quand $p = 1$. Interpréter.

(C) On a demandé à 3 élèves de Terminale d'écrire un script Python permettant d'étudier le temps que met la distribution pour être presque stationnaire (en fonction de p). La consigne correspondante ainsi que leurs programmes sont donnés en annexe 1, ainsi que dans le fichier `DMlin.py`.

Ces instructions permettent-elle d'atteindre le résultat attendu ? Si non, les corriger pour que cela soit le cas. Proposer une méthode en une seule fonction, en Python ou en pseudo-code.

PageRank

Le PageRank est l'algorithme d'analyse des liens hypertextes utilisé par Google pour le classement des pages web par ordre de pertinence. Il utilise une méthode probabiliste.

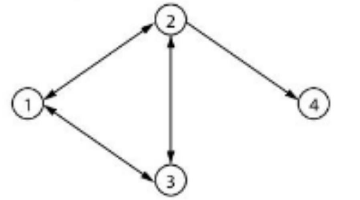
Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard.

Quand il est sur une page :

• soit il choisit une page au hasard sur l'ensemble du réseau, avec une probabilité p (y compris la page où il se trouve) ;

• soit, avec une probabilité $1-p$, il clique au hasard, sur un des liens disponibles, depuis la page où il se trouve, avec équiprobabilité des liens.

Considérons le graphe d'un mini-web, à quatre pages.



On note X_n la position du surfeur au bout de n étapes en supposant qu'il parte d'une des pages.

$X_n \in \{1;2;3;4\}$.

On note π_n la matrice ligne

$\pi_n = \big(P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\ \ P(X_n=4)\big)$.

1. a. Montrer que :

$$P(X_{n+1}=1) = (1-p)\left(\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3)\right)+\frac{p}{4}.$$

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.)

b. De la même façon, écrire $P(X_{n+1}=2)$, $P(X_{n+1}=3)$ et $P(X_{n+1}=4)$.

2. Montrer que les relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme $\pi_{n+1}=(1-p)\pi_n A+\frac{p}{4}B$ où A est une matrice carrée et B une matrice ligne, à déterminer.

3. On pose $C=\frac{p}{4}B$. Déterminer la matrice π telle que $\pi=(1-p)\pi A+C$.

4. On pose $V_n=\pi_n-\pi$.

a. Vérifier que $V_{n+1}=(1-p)V_n A$.

En déduire que $V_n=(1-p)^n V_0 A^n$.

b. À la calculatrice, calculer les premières puissances de A.

Quelle conjecture peut-on faire sur les coefficients de A^n ?

c. Démontrer la conjecture précédente par récurrence.

d. En déduire la limite de la suite π_n.

4. On suppose que l'internaute est sur la page 1 et que $p=0,25$.

Classer les pages par pertinence décroissante.

Exercice 2 Graphe de Heawood

On appellera $\mathcal{H}$ le graphe simple non orienté de la Figure 1, dont `H` est la matrice d'adjacence, disponible dans le fichier `DMlin.py`, ainsi que dans l'annexe 2.

Partie I — Un graphe régulier

I.1. Étant donné un entier $k \geqslant 2$, on dit qu'un graphe simple (c'est-à-dire sans boucle et sans arête multiple) est **k-régulier** si chaque sommet du graphe est de degré k.

a. Décrire, sans argumenter, les graphes connexes 1-réguliers, les graphes connexes 2-réguliers.

b. Donner une relation simple entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe k-régulier.

En déduire que tout graphe 3-régulier possède un nombre pair de sommets.

c. Vérifier à partir de la Figure 1, que le graphe $\mathcal{H}$ est 3-régulier. Quel est le nombre de sommets, d'arêtes de $\mathcal{H}$? Justifier soigneusement votre dénombrement.

I.2. Soient $k \geqslant 3$ et $n \geqslant 1$ des entiers naturels. On considère un graphe $\mathcal{G}$ simple d'ordre n, on note $\mathtt{G}$ sa matrice d'adjacence. On note $\mathtt{S}$ la matrice colonne d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.

a. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ est k-régulier si et seulement si $\mathtt{S}$ est un vecteur propre de $\mathtt{G}$ pour la valeur propre k.

b. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ est k-régulier si et seulement si tous les coefficients diagonaux de $\mathtt{G}^2$ sont égaux à k.

c. (⌨) Calculer $\mathtt{H}^2$ en utilisant WIMS. Confronter avec le résultat de la question **I.1.c**.

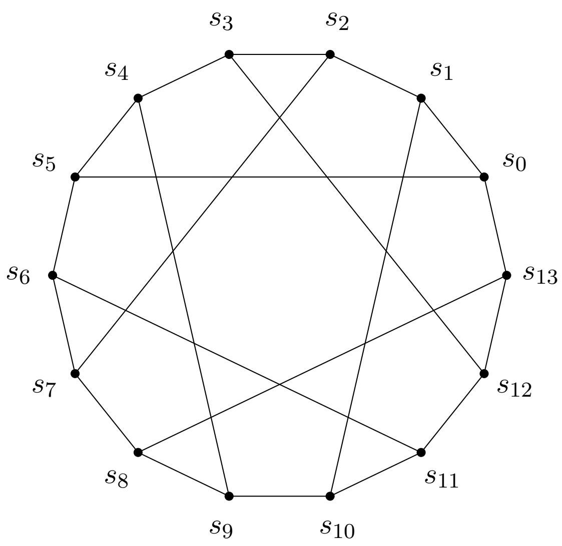


FIGURE 1. Le graphe $\mathcal{H}$.

Partie II — Cycles élémentaires

On appelle **cycle élémentaire** de longueur $\ell \geqslant 3$ d'un graphe simple, toute suite de ℓ sommets distincts $s_1, \dots, s_\ell$ telle que, en posant $s_0 = s_\ell$, il existe une arête joignant s_{i-1} à s_i pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, avec la convention que les suites $s_2, \dots, s_\ell, s_1$ et $s_\ell, \dots, s_1$ définissent le même cycle élémentaire.

II.1. **a.** Selon vous, pourquoi la définition de cycle élémentaire impose-t-elle la condition $\ell \geqslant 3$?

b. Soit $\mathcal{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A})$ un graphe simple d'ordre n et $\mathtt{G}$ sa matrice d'adjacence. Montrer que le graphe $\mathcal{G}$ possède un cycle de longueur 3 si et seulement si il existe un couple $(s, s') \in \mathrm{S}^2$ tel que les coefficients d'indices (s, s') de $\mathtt{G}$ et $\mathtt{G}^2$ sont tous les deux non nuls.

c. Proposer, en la justifiant, une méthode pour déterminer si le graphe $\mathcal{G}$ possède un cycle de longueur 4 par simple lecture de la matrice $\mathtt{G}^2$.

d. En utilisant $\mathtt{H}$ et $\mathtt{H}^2$, déterminer si le graphe $\mathcal{H}$ possède un cycle de longueur de longueur 3 ou 4.

II.2. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathtt{I}_n$ la matrice identité d'ordre n.

a. Montrer que si le graphe $\mathcal{G}$ est 3-régulier et sans cycle de longueur 4, alors la matrice $\mathtt{G}^2 - 3\mathtt{I}_n$ est la matrice d'adjacence d'un graphe 6-régulier.

b. Tracer une représentation graphique de ce graphe 6-régulier dans le cas du graphe $\mathcal{H}$. Décrire ses composantes connexes.

c. En déduire qu'entre deux sommets distincts de $\mathcal{H}$ dont les indices ont même parité, il existe une et une seule chaîne de longueur 2.

d. Déterminer le diamètre de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire la plus grande distance possible entre deux de ses sommets.

e. Donner la liste complète des cycles élémentaires de longueur 6 passant par s_0 et s_7.

II.3. **a.** En s'aidant des résultats de la question **II.2.b**, donner deux vecteurs colonnes $\mathtt{S}_0$ et $\mathtt{S}_1$, différents de $\mathtt{S}$, dont les coefficients appartiennent à $\{0, 1\}$ et qui soient vecteurs propres de $\mathtt{H}^2 - 3\mathtt{I}_n$ pour la valeur propre 6.

b. (⌨) Vérifier que les produits ${}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}\mathtt{S}_0$ et ${}^t\mathtt{S}_1\mathtt{H}\mathtt{S}_1$ sont nuls. Interpréter cette annulation en termes de graphes.

c. Montrer que pour tout entier naturel m, les produits ${}^t\mathtt{S}_0\mathtt{H}^{2m+1}\mathtt{S}_0$ et ${}^t\mathtt{S}_1\mathtt{H}^{2m+1}\mathtt{S}_1$ sont nuls.
En déduire que le graphe $\mathcal{H}$ n'admet pas de cycle élémentaire de longueur impaire.

Partie III — Le spectre

III.1. Soit n un entier naturel non nul. On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice dont les coefficients d'indice (i,j) vaut 1 si i et j sont de même parité, et 0 sinon.

- **a.** Déterminer l'image de f, en donner une base (on pourra utiliser les vecteurs $\mathtt{S}_0$ et $\mathtt{S}_1$ de la question 5). Donner la dimension du noyau de f.
- **b.** Montrer que $\operatorname{Im} f$ est l'espace propre de f associé à la valeur propre n.
- **c.** Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^{2n}$.
- **d.** Montrer que le polynôme minimal de f est $X^2 - nX$.

III.2. On admet pour cette question que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ annule le polynôme $X^2 - 7X$.

- **a.** Montrer que $\mathtt{H}$ annule $(X^2-9)(X^2-2)$. En considérant le coefficient d'indice (s_0, s_7), montrer que $\mathtt{H}$ n'annule aucun polynôme de degré 3. Montrer que $\mathtt{H}$ n'annule aucun polynôme de degré 2.
- **b.** En déduire le spectre de $\mathtt{H}$.

III.3. (Facultatif) Montrer que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14}$ annule le polynôme $X^2 - 7X$. Indication : on pourra utiliser le résultat de la question **II.2.b** et noter que $\mathtt{H}^2 - 2\mathtt{I}_{14} = \mathtt{H}^2 - 3\mathtt{I}_{14} + \mathtt{I}_{14}$.

Partie IV — Un graphe très symétrique

Étant donné $\mathcal{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A})$ un graphe fini et σ une permutation de S, on dit que σ est un automorphisme de $\mathcal{G}$ si pour tous s, s', $(\sigma(s), \sigma(s')) \in \mathrm{A} \iff (s, s') \in \mathrm{A}$.

IV.1. (Facultatif) Montrer que si σ est un automorphisme de $\mathcal{G}$, alors les espaces propres de $\mathtt{G}$ sont stables par l'endomorphisme associé à $\mathtt{P}_\sigma$.

IV.2. (Facultatif) (⌨) On donne les permutations

$$\gamma = (s_0 s_2 s_4 s_6 s_8 s_{10} s_{12})(s_1 s_3 s_5 s_7 s_9 s_{11} s_{13})$$
$$\rho = (s_0 s_6 s_8)(s_2 s_{12} s_{10})(s_1 s_7 s_9)(s_3 s_5 s_{13})$$
$$\lambda = (s_3 s_4)(s_2 s_5)(s_1 s_6)(s_0 s_7)(s_8 s_{13})(s_9 s_{12})(s_{10} s_{11}).$$

Les matrices de permutation associées sont données dans le fichier compagnon `DMlin.py`.

Proposer une procédure à l'aide d'un calcul matriciel impliquant $\mathtt{H}$ et les matrices de permutation $\mathtt{P}_\gamma$, $\mathtt{P}_\rho$ et $\mathtt{P}_\lambda$ permettant de vérifier que γ, ρ et λ sont des automorphismes de $\mathcal{H}$.

IV.3. (Facultatif) Interpréter graphiquement sur la Figure 1 le résultat de la question **IV.2** pour γ et λ.

Annexe 1 : programmes des élèves

Consigne. On souhaite étudier la vitese de convergence de la suite π_n vers $\pi = (p_1; p_2; p_3; p_4)$ établie à la question 4, en fonction de p. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $\pi_n = (p_1(n); p_2(n); p_3(n); p_4(n))$ Ecrivez une fonction `convergence(p, delta)` qui renvoie le temps nécessaire pour que

$$\sum_{i=1}^{4} |p_i(n+1) - p_i(n)|^2 < \delta^2.$$

Votre fonction devra aussi renvoyer une estimation de la probabilité invariante. Vous testerez vos résultats à l'aide de l'instruction

```
for p in (0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1):
    print(p, convergence(p, .01))
```

Programme de l'élève A. L'élève A a produit le programe suivant.

```
def convergence(p, delta):
    p1, p2, p3, p4 = 0.25, 0.25, 0.25, 0.25
    n = 1
    q1 = p*0.25 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
    q2 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
    q3 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
    q4 = p*0.25 + (1-p)/3*p2
    while abs(p1-q1)+abs(q2-p2)+abs(q3-p3)+abs(q4-p4)>
        delta:
        q1 = p*0.25 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
        q2 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
        q3 = p*0.25 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
        q4 = p*0.25 + (1-p)/3*p2
        n = n+1
    return n, (q1, q2, q3, q4)
```

Programme de l'élève B. L'élève B a produit le programe suivant.

```
def convergence(p, delta):
    p1, p2, p3, p4 = 0.25, 0.25, 0.25, 0.25
    n = 0
    d1,d2,d3,d4 = 1,1,1,1
    while d1+d2+d3+d4 > delta:
        n=n+1
        q1 = p/4 + (1-p)/3*p2 + (1-p)/2*p3
        q2 = p/4 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/2*p3
        q3 = p/4 + (1-p)/2*p1 + (1-p)/3*p2
        q4 = p/4 + (1-p)/3*p2 + (1-p)*p4
        d1,d2,d3,d4 = p1-q1,p2-q2,p3-q3,p4-q4
        p1,p2,p3,p4=q1,q2,q3,q4
    return n, q1, q2, q3, q4
```

Programme de l'élève C. L'élève C a produit le programme suivant (comportant deux fonctions)

```
def distribPR(n,p):
  p1,p2,p3,p4 = 0.25,0.25,0.25,0.25
  for k in range(n):
    p1 = p*0.25+(1-p)/3*p2+(1-p)/2*p3
    p2 = p*0.25+(1-p)/2*p1+(1-p)/2*p3
    p3 = p*0.25+(1-p)/2*p1+(1-p)/3*p2
    p4 = p*0.25 +(1-p)/3*p2 +0.75*(1-p)*p4
  return p1,p2,p3,p4

def convergence(p,delta):
    for m in range (100):
      p1,p2,p3,p4 = distribPR(m,p)
      q1,q2,q3,q4 = distribPR(m+1,p)
      if (p1-q1)*(p1-q1)+(p2-q2)*(p2-q2)+(p3-q3)*(p3-q3)
          +(p4-q4)*(p4-q4) < delta*delta:
        return m,q1,q2,q3,q4
        break
```

Annexe 2 : Les matrices de l'exercice 2

$$\mathtt{H} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathtt{P}_\gamma = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathtt{P}_\rho = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\mathtt{P}_\lambda = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$