

Problèmes basiques, complexes, atypiques, typologie

Gabriel Pallier

INSPÉ de l'académie de Paris, Sorbonne université
Cours de M1 MEEF

Décembre 2021

Aujourd'hui

Problèmes basiques

Rappels sur le champ additif et typologie de Vergnaud

Quelques mots sur le champ multiplicatif

Problèmes complexes

Décompositions en problème basiques

Plusieurs procédures, plusieurs décomposition

Extraire les données utiles

Problèmes atypiques

Chameaux et dromadaires

Le problème des paniers

Les problèmes atypiques précurseurs du calcul littéral

Retour sur la feuille d'exercices

- ▶ Les diapositives sur fond coloré en violet sont à recopier. Pour les autres quelques notes suffiront.
- ▶ Le diaporama est sur Moodle.
- ▶ Il y aura des exercices, gardez un brouillon
- ▶ N'hésitez pas à m'interrompre !

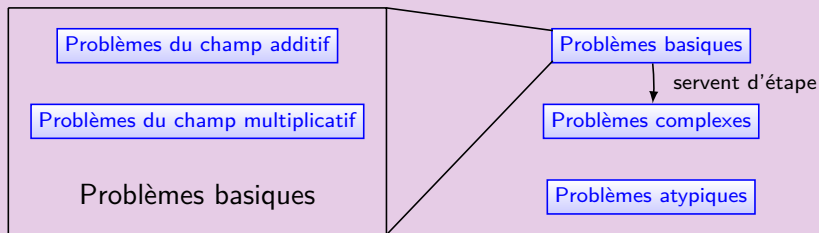
Les problèmes à l'école primaire

- ▶ Programme cycle 2, source Eduscol. « *Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures. La pratique quotidienne du calcul mental conforte la maîtrise des nombres et des opérations.* »
- ▶ G. Brousseau, Théorie des situations didactiques p.118 :
 - ▶ « Une notion apprise n'est utilisable que dans la mesure où elle est reliée à d'autres, ces liaisons constituant sa signification, son étiquette, sa méthode d'activation ; »
 - ▶ « mais elle n'est apprise que dans la mesure où elle est utilisable et utilisée effectivement, c'est-à-dire seulement si elle est solution d'un problème. »



Basique, complexe, atypique

Cycle 2 et cycle 3



- ▶ Les problèmes basiques sont ceux qui se rapportent à un seul calcul, éventuellement à plus de deux termes (par exemple une addition de 3 nombres). Se répartissent en champ additif et champ multiplicatif.
- ▶ Les problèmes atypiques sont à part. Leur formulation peut rappeler celle des problèmes basiques, mais ils ne sont pas susceptibles d'être décomposés en problèmes basiques tels que définis précédemment.

Des inégalités importantes (source : DEPP)

Au sein du secteur public, c'est en résolution de problèmes que les écarts sont les plus marqués entre les performances des élèves de REP+ et ceux scolarisés hors éducation prioritaire : écart de 23,5 points entre les proportions d'élèves présentant une maîtrise satisfaisante (au-dessus du seuil 2). On observe aussi des différences importantes dans les domaines « additionner » et « soustraire » où les écarts s'élèvent respectivement à 19,8 et 16,4 points. En géométrie et en calcul mental, les écarts sont moins marqués : respectivement 11 et 14,6 points d'écart pour chacun de ces domaines.

Figure 5.18 – Répartition des élèves dans les groupes selon le domaine évalué en mathématiques en début de CE1 à la rentrée 2020, selon le secteur

Domaine	Public Hors EP			REP			REP+			Privé		
	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2
Additionner	21.7	19.5	58.8	31.4	21.6	47.1	38.8	22.3	39.0	17.0	18.5	64.5
Associer un nombre entier à une position*	17.6	25.0	57.5	27.0	29.6	43.5	33.1	30.2	36.7	13.5	22.8	63.8
Calculer mentalement*	6.2	16.6	77.2	11.0	20.6	68.4	15.1	22.4	62.6	4.2	14.6	81.2
Écrire des nombres entiers*	11.0	15.9	73.1	16.6	19.5	63.8	23.0	21.4	55.6	7.2	13.4	79.5
Lire des nombres entiers*	7.1	17.0	75.9	12.1	21.0	66.9	18.0	23.6	58.4	3.9	13.8	82.2
Reproduire un assemblage*	3.4	12.8	83.8	5.8	17.4	76.8	8.3	18.9	72.8	2.4	11.1	86.5
Représenter des nombres entiers*	11.1	28.6	60.3	19.2	33.2	47.6	23.7	33.5	42.8	7.9	27.4	64.8
Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul*	18.4	32.8	48.7	30.4	36.6	33.0	39.1	35.7	25.2	13.2	31.7	55.1
Soustraire	24.8	18.6	56.6	32.0	20.2	47.8	39.2	20.6	40.2	22.0	17.9	60.1

Source : MENJS-DEPP, Repères CP-CE1
© DEPP

Problèmes basiques

Vergnaud et la typologie des problèmes

Théorie des champs conceptuels
(1990)

Définition (champ conceptuel)

Ensemble de **situations** / **activités**
et ensemble de concepts
constituant la base nécessaire à
l'identification des objets, des
relations et des processus pertinents
dans ces situations.



Gérard Vergnaud (1933 - 2021)

Exemple (structures additives)

Le champ conceptuel des structures additives : l'ensemble des situations
faisant appel à une **addition**, une **soustraction**, ou à une composition de
ces deux opérations.

Typologie des problèmes additifs

4 **types** de problèmes additifs à l'école primaire.

1. Composition de mesures
2. Transformation d'état
3. Comparaison d'état
4. Composition de transformations

A chaque type est associé un **schéma général** (diagramme).

Les types admettent des sous-types, auxquels sont associés des schémas particuliers (diagramme, décoré par des symboles ' ?').

1. Le type « Compositions de mesures »

- ▶ Les données sont des mesures :
 - ▶ Des quantités discrètes au cycle 2 (venant de l'énumération d'une collection ; on en fait des **nombre entiers**)
 - ▶ Des quantités discrètes ou continues au cycle 3. (on mesure des grandeurs qui s'additionnent bien, comme la longueur ou la masse ; on en fait des **nombre décimaux**)
- ▶ L'énoncé peut être statique (s'il fait intervenir une description) ou bien dynamique (s'il fait intervenir une réunion ou un partage).
- ▶ Plus de deux mesures peuvent intervenir.

Un exemple au cycle 2

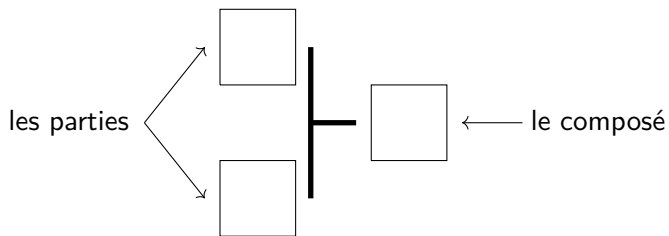
1^{er} sous-type : Recherche du composé

Dans un bouquet de fleurs, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?

2^{ème} sous-type : Recherche de la partie

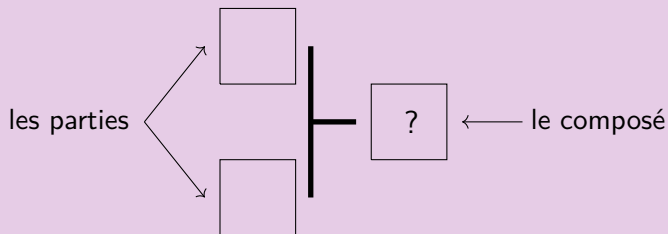
Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ?

Compositions de mesures : le schéma général



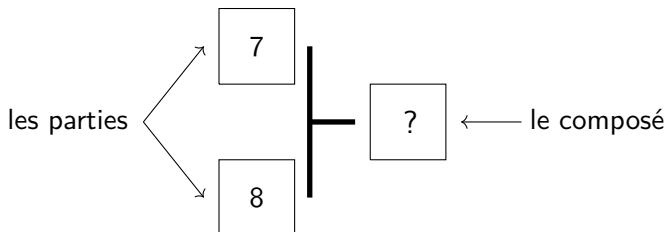
Compositions de mesures : les schémas particuliers

Recherche du composé



Compositions de mesures : les schémas particuliers

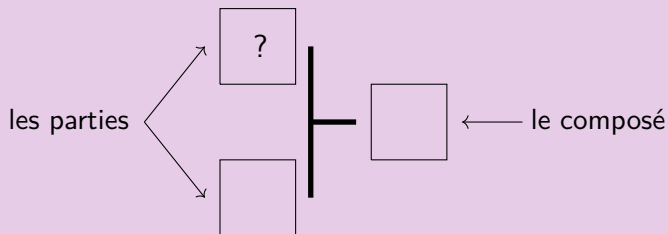
Recherche du composé



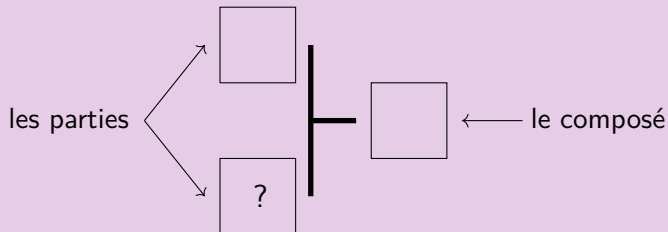
Dans un bouquet de fleurs, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?

Compositions de mesures : les schémas particuliers

Recherche de la partie

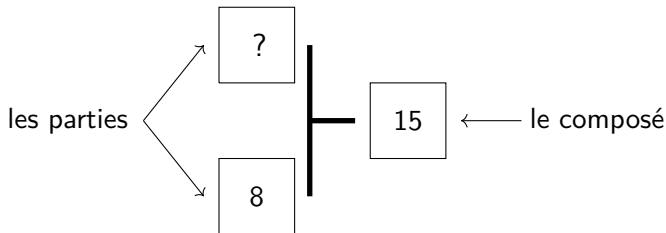


ou



Compositions de mesures : les schémas particuliers

Recherche de la partie



Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses.
Combien y a-t-il d'iris ?

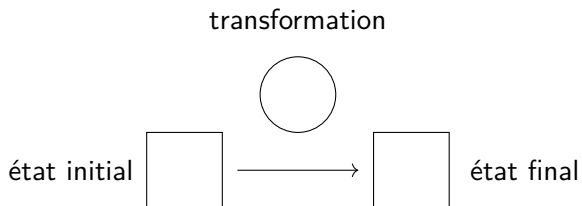
2. Le type « Transformation d'un état »

- ▶ Les données sont des mesures **ou des repères** (la date, la température).
- ▶ L'énoncé est dynamique, il évoque (après interprétation) une augmentation ou une diminution d'un état initial vers un état final
- ▶ Plus de deux mesures peuvent intervenir.

Les 3 sous-types, en GS

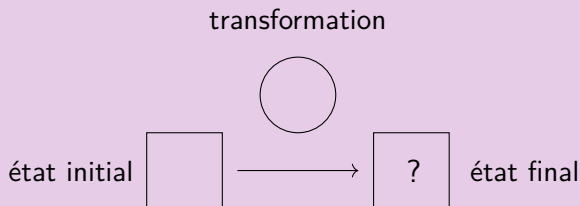
Recherche de l'état final. Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant ?	Recherche de la transformation. Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?	Recherche de l'état initial. J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?
--	---	---

Transformation d'un état : le schéma général



Transformation d'un état : les schémas particuliers

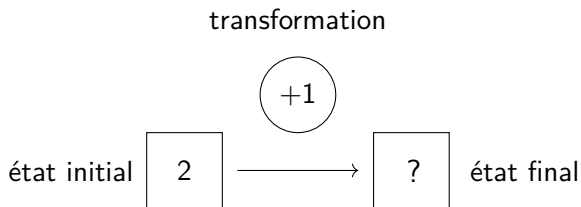
Recherche de l'état final



La transformation est **signée** (précédée de + ou de -), contrairement aux repères des états initial et final.

Transformation d'un état : les schémas particuliers

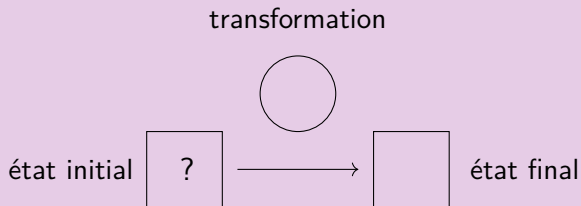
Recherche de l'état final



Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant ?

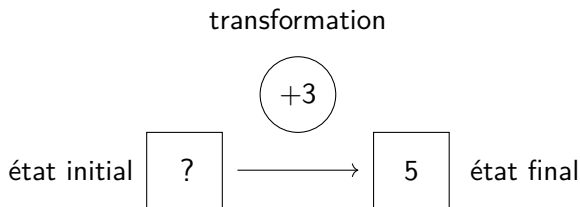
Transformation d'un état : les schémas particuliers

Recherche de l'état initial



Transformation d'un état : les schémas particuliers

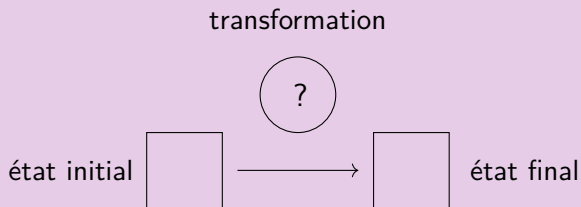
Recherche de l'état initial



J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?

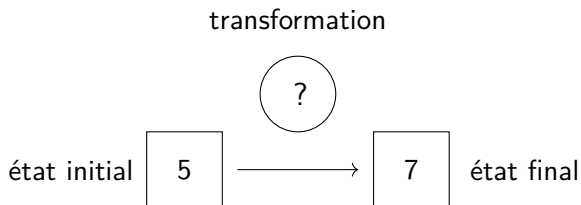
Transformation d'un état : les schémas particuliers

Recherche de la transformation



Transformation d'un état : les schémas particuliers

Recherche de la transformation



Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?

3. Les problèmes de type « Comparaison d'états »

- ▶ Les données sont des mesures (associées aux vocables « de plus », « de moins ») ou des repères sur une ligne (« plus loin », « moins loin »).
- ▶ L'énoncé est en général statique.
- ▶ Il peut y avoir inclusion

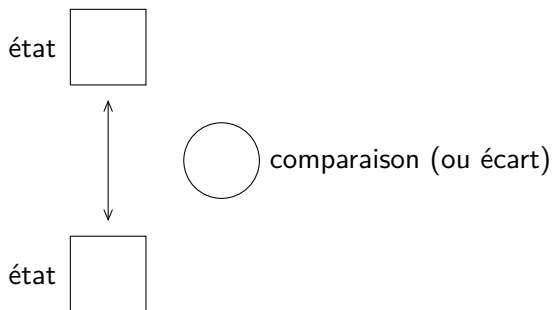
Dans ce type de problème, on trouve presque toujours les expressions « de plus/de moins »

Exemples et sous-types

Recherche de l'un des états
Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou de moins) que sa sœur. Quel est l'âge de sa sœur ?

Recherche de la comparaison
Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. Sur une autre, il y en a 5. Combien y a-t-il de gâteaux de plus sur la 2ème assiette ?

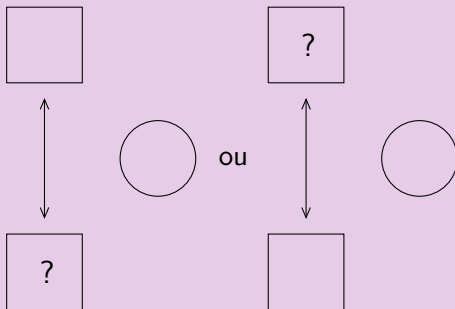
Comparaison d'état : le schéma général



En général, l'état de plus grande mesure est noté en haut.

Comparaison : les schémas particuliers

Recherche de l'un des états



4. Les problèmes de type « Composition de transformation »

- ▶ Les données sont des mesures ou des repères sur une ligne. L'énoncé est dynamique.

4. Les problèmes de type « Composition de transformation »

- ▶ Les données sont des mesures ou des repères sur une ligne. L'énoncé est dynamique.
- ▶ Les transformations peuvent être de même sens ou non.

4. Les problèmes de type « Composition de transformation »

- ▶ Les données sont des mesures ou des repères sur une ligne. L'énoncé est dynamique.
- ▶ Les transformations peuvent être de même sens ou non.
- ▶ Plus de deux transformations peuvent intervenir.

Exemples et sous-types

Recherche de la transformation composée.

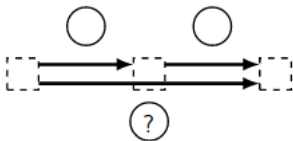
- ▶ À la première partie je gagne 7 billes, à la deuxième, j'en perds 5. En ai-je gagné ou perdu ? Combien ?

Recherche de l'une des transformations composantes

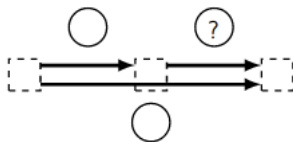
- ▶ Au jeu de l'oie, je joue 2 coups : au 2e, j'avance de 9. Au total, j'ai reculé de 4. Que s'est-il passé au premier coup ?
- ▶ Aujourd'hui, j'ai dépensé 56€. Ce matin, j'ai dépensé 24€. Combien ai-je dépensé cet après-midi ?

Composition de transformation : les schémas particuliers

Recherche de la composée



Recherche d'une transformation



Quelques mots sur le champ multiplicatif

Contrairement aux problèmes du champ additif, il est pertinent de classer dans un premier temps les problèmes du champ multiplicatif suivant l'opération mise en oeuvre : multiplication ou division. Cependant, une typologie plus fine est ensuite nécessaire.

Les problèmes du champ multiplicatif sont :

- ▶ Les problèmes de multiplication
 1. Configuration rectangulaire
 2. Multiplication
- ▶ Les problèmes de division
 1. Division quotient
 2. Division partition

On ne leur attribue pas de schéma.

Configuration rectangulaire

Ces problèmes mettent en jeu un produit de mesures et sont identifiés comme supports à la construction du concept de multiplication.

Exemple

Quel est le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de 3 sur 4 ?

Multiplication

Ces problèmes relèvent de l'addition répétée. On cherche le nombre total d'éléments

Exemple

Il y a 4 élèves. La maîtresse distribue 3 jetons à chaque élève. Combien distribue-t-elle de jetons en tout ?

Division quotient

On calcule le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection en connaissant la valeur d'un paquet.

Exemple

La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a-t-il d'élèves ?

Division partition

On calcule la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.

Exemple

La maitresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?

Problèmes basiques : bilan

- ▶ Pour l'enseignant, connaître les typologies de problèmes fournit une clé de lecture des énoncés et invite dans le même temps à proposer les situations les plus variées possibles.
- ▶ La fréquentation régulière d'énoncés diversifiés et leur traitement doivent conduire progressivement les élèves à s'approprier les procédures standardisées de résolution correspondantes.

À mesure que la collection de problèmes basiques qu'elle a rencontrés grandit, l'élève construit un **savoir mobilisable**.

Problèmes complexes

Problèmes complexes

Enjeu pour l'élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et en qualifiant les résultats.

Exercice

Décomposer le problème suivant en deux problèmes basiques du champ additif. Préciser la typologie de ces problèmes.

Énoncé (CP)

Dans l'enveloppe, maman a rangé des photos de ses enfants pour les inscrire au centre aéré. Elle a mis 13 photos : 5 photos de Zoé, 4 photos de Tom et des photos de Lucie.

Combien a-t-elle mis de photos de Lucie ?



Solution

Enoncé (CP)

Dans l'enveloppe, maman a rangé des photos de ses enfants pour les inscrire au centre aéré. Elle a mis 13 photos : 5 photos de Zoé, 4 photos de Tom et des photos de Lucie.

Combien a-t-elle mis de photos de Lucie ?



Sous problème basique	Données nécessaires	type
A. Photos de Zoé et Tom	photos de Zoé et photos de Tom	combinaison
B. Photos de Lucie	Nombre total et photos de Zoé et Tom	combinaison

Dans l'enveloppe, il y a $5 + 4 = 9$ photos de Zoé et Tom.

Il y a 13 photos en tout.

Donc il y a $13 - 9 = 4$ photos de Lucie.

Plusieurs procédures, plusieurs décompositions

Il n'y a pas unicité de la décomposition en sous-problèmes basiques. La résolution suivante, bien que moins attendue (pourquoi?), est possible.

Dans l'enveloppe, il y a 13 photos en tout et 5 photos de Loé.
il y a $13 - 5 = 8$ photos de Com et Lucie. Il y a 4 photos de
Com. Donc il y a $8 - 4 = 4$ photos de Lucie.

L'élève a décomposé le problème complexe en deux problèmes basiques différents (toujours de type combinaison).

Exercice

Décomposer le problème suivant en deux problèmes basiques du champ additif. Préciser la typologie de ces problèmes.

Énoncé (CE1)

Marie, Pierre et Nadia ont 28 ans à eux trois. Marie a 10 ans. Pierre a trois ans de plus que Marie. Quel est l'âge de Nadia ?

Exercice

Énoncé (CE1)

Marie, Pierre et Nadia ont 28 ans à eux trois. Marie a 10 ans. Pierre a trois ans de plus que Marie. Quel est l'âge de Nadia ?

Solution

Enoncé (CE1)

Marie, Pierre et Nadia ont 28 ans à eux trois. Marie a 10 ans. Pierre a trois ans de plus que Marie. Quel est l'âge de Nadia ?

Sous problème basique	type
A. Âge de Pierre et Nadia à eux deux	combinaison
B. Âge de Pierre	combinaison
C. Âge de Nadia	combinaison

Solution

Enoncé (CE1)

Marie, Pierre et Nadia ont 28 ans à eux trois. Marie a 10 ans. Pierre a trois ans de plus que Marie. Quel est l'âge de Nadia ?

Sous problème basique	type
A. Âge de Pierre et Nadia à eux deux	combinaison
B. Âge de Pierre	combinaison
C. Âge de Nadia	combinaison

Dans la décomposition précédente, l'ordre dans lequel on effectue les problèmes basiques A et B n'importe pas.

Pas d'ordre imposé

Marie a 10 ans et Pierre a trois ans de plus que Marie.

Donc Pierre a $10 + 3 = 13$ ans.

Marie, Pierre et Nadia ont 28 ans à eux trois et Marie a 10 ans. Donc Pierre et Nadia ont $28 - 10 = 18$ ans à eux deux.

Donc Nadia a $18 - 13 = 5$ ans.

Extraire les données pertinentes

Exercice (CE2)

L'expédition du navigateur portugais Magellan (né en 1480, mort en 1521) réalisa en trois ans le premier tour du monde. Sur les 5 voiliers et 234 hommes d'équipage qui embarquèrent, un seul bateau et 18 survivants rentrèrent en Espagne en 1522. C'est depuis cette expédition qu'on sait que la Terre est ronde¹.

1. En quelle année l'expédition est-elle partie ?
2. Magellan est-il mort au cours de cette expédition ? Si oui, à quel âge ?
 - a. Résoudre ce problème.
 - b. Préciser les sous-problèmes basiques et leur typologie pour votre résolution.
 - c. Quelles sont les difficultés attendues ?
 - d. Identifier des variables didactiques.

1. Ou du moins qu'elle n'est pas plate.

Extraire les données pertinentes, suite

Exercice (CE2)

L'expédition du navigateur portugais Magellan (né en 1480, mort en 1521) réalisa en trois ans le premier tour du monde. Sur les 5 voiliers et 234 hommes d'équipage qui embarquèrent, un seul bateau et 18 survivants rentrèrent en Espagne en 1522. C'est depuis cette expédition qu'on sait que la Terre est ronde.

1. En quelle année l'expédition est-elle partie ?
2. Magellan est-il mort au cours de cette expédition ? Si oui, à quel âge ?

a.

1. L'expédition a duré 3 ans et est arrivée en 1522. Elle est donc partie en 1519.
2. Magellan est mort en 1521, et $1521 < 1522$, donc Magellan est mort au cours de cette expédition. Nous savons qu'il est né en 1480. Donc il est mort à l'âge de $1521 - 1480 = 41$ ans (ou presque...).

Extraire les données pertinentes, suite

Exercice (CE2)

L'expédition du navigateur portugais Magellan (né en 1480, mort en 1521) réalisa en trois ans le premier tour du monde. Sur les 5 voiliers et 234 hommes d'équipage qui embarquèrent, un seul bateau et 18 survivants rentrèrent en Espagne en 1522. C'est depuis cette expédition qu'on sait que la Terre est ronde.

1. En quelle année l'expédition est-elle partie ?
2. Magellan est-il mort au cours de cette expédition ? Si oui, à quel âge ?

b.

1. Transformation (temporalité).
2. Comparaison (inégalité) et Transformation.

Extraire les données pertinentes, suite

Exercice (CE2)

L'expédition du navigateur portugais Magellan (né en 1480, mort en 1521) réalisa en trois ans le premier tour du monde. Sur les 5 voiliers et 234 hommes d'équipage qui embarquèrent, un seul bateau et 18 survivants rentrèrent en Espagne en 1522. C'est depuis cette expédition qu'on sait que la Terre est ronde.

1. En quelle année l'expédition est-elle partie ?
2. Magellan est-il mort au cours de cette expédition ? Si oui, à quel âge ?

c.

- ▶ Beaucoup de données ne sont pas utiles.
- ▶ Les données sont chiffrées et en lettres (trois, 1522).
- ▶ Pour la soustraction, jalonnement : les deux nombres sont "grands".

Bilan partiel : compétences mises en jeu

Plusieurs compétences sont mises en jeu :

- ▶ L'organisation, pour décomposer en sous-problèmes basiques
- ▶ La recherche des données utiles.

Les problèmes complexes sont aussi un bon **outil diagnostique** (→ évaluations nationales CP, CE1).

Le recours possible à des sous-problèmes de typologies diverses peut permettre d'identifier celles qui sont plus ou moins **mobilisables** pour l'élève, et donc celles qui doivent faire l'objet d'un renforcement.

Au cycle 3, de plus en plus d'étapes

Exercice (CM2)

Au cinéma Royal Ciné, un enfant paye 4 € la séance et un adulte, 6 € la séance.

A la séance de l'après midi il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir il y avait 15 adultes et 20 enfant.

La recette de la journée est 542 €.

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

1. Résoudre ce problème
2. Décomposer en problèmes basique. Préciser leurs champs et leur typologie.

Au cycle 3, de plus en plus d'étapes

Exercice (CM2)

Au cinéma Royal Ciné, un enfant paye 4 € la séance et un adulte, 6 € la séance.

A la séance de l'après midi il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir il y avait 15 adultes et 20 enfant.

La recette de la journée est 542 €.

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Au cycle 3, de plus en plus d'étapes

Exercice (CM2)

Au cinéma Royal Ciné, un enfant paye 4 € la séance et un adulte, 6 € la séance.

A la séance de l'après midi il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir il y avait 15 adultes et 20 enfant.

La recette de la journée est 542 €.

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Phrases réponses	Calculs
La recette du soir est 170 euros.	$15 \times 6 = 90, 20 \times 4 = 80, 90 + 80 = 170$
La recette de l'après midi est 372 euros	$542 - 170 = 372$
Dedans il y a 72 euros pour les enfants	$6 \times 50 = 300, 372 - 300 = 72$
Il y avait 18 enfants.	$72 \div 4 = 18.$

Au cycle 3, de plus en plus d'étapes

Phrases réponses	Calculs
La recette du soir est 170 euros.	$15 \times 6 = 90, 20 \times 4 = 80, 90 + 80 = 170$
La recette de l'après midi est 372 euros	$542 - 170 = 372$
Dedans il y a 72 euros pour les enfants	$6 \times 50 = 300, 372 - 300 = 72$
Il y avait 18 enfants.	$72 \div 4 = 18.$

Problèmes atypiques

Un exemple au cycle 3

Inspiré de CRPE

Dans le désert, chameaux et dromadaires se croisent. Il y a 12 têtes et 20 bosses. Combien y a-t-il de chameaux ? Combien de dromadaires ?



Chameau



Dromadaire

Quelques productions d'élèves

6 ch
6 ch

Il y a quatre domad^xes.

On a essayer d'ajouter et enlever des bosses.

Rappel
x = une tête
● = une bosse
●● = deux bosses

2 élèves de CM1 en autonomie.

Quelques productions d'élèves

$8 \times 2 = 16$
 $16 + 4 = 20$

Vrai

20 = bosses .
4 = dromadaires.
8 = chameaux.
16 = bosses de chameaux.
4 = bosses de dromadaires.

Il y a 4 dromadaires.
repons.

$6 \times 2 = 12$ $12 + 6 = 18$
 $7 \times 2 = 14$ $14 + 6 = 20$
 $3 \times 2 = 18$ $18 - 2 = 20$

faux

2 élèves de CM1 en autonomie.

Analyse des productions

- ▶ Les productions font apparaître une recherche par tâtonnements.
- ▶ La solution est approximée, puis des ajustements sont faits jusqu'au résultat.
- ▶ L'unicité de la solution n'est pas questionnée

Analyse des productions

- ▶ Les productions font apparaître une recherche par tâtonnements.
- ▶ La solution est approximée, puis des ajustements sont faits jusqu'au résultat.
- ▶ L'unicité de la solution n'est pas questionnée

Une résolution possible (« procédure experte »).

S'il n'y avait que des dromadaires, on compterait 12 têtes et 12 bosses. Or, on compte 20 bosses. Chaque chameau présente une bosse de plus par rapport à un dromadaire. C'est donc qu'il y avait $20 - 12 = 8$ chameaux. Et donc $12 - 8 = 4$ dromadaires.

Commentaire

Ce problème est atypique au cycle 3.

Il existe cependant une procédure au moyen du calcul littéral.

Soit c le nombre de chameaux et d le nombre de dromadaires

$$\begin{cases} c + d & = 12 \\ 2 \times c + d & = 20. \end{cases}$$

$$c = 2 \times c + d - c - d = 20 - 12 = 8, \text{ et } d = 12 - 8 = 4.$$

Autre exemple

Araignées et fourmis se croisent. Il y a 116 pattes et 16 têtes. Combien y a-t-il de fourmis ?

Le problème des paniers

Les châtaignes (CM1-CM2)

Nicolas, Jeanne et Lucas vont cueillir des châtaignes. A la fin de la cueillette, Lucas a deux fois plus de châtaignes que Jeanne, et Lucas a deux fois moins de châtaignes que Nicolas. Le nombre total de châtaignes cueillies est 154.

Combien de châtaigne ont eu Jeanne, Nicolas et Lucas ?

1. Résoudre ce problème.
2. Analyser les productions d'élèves suivantes.

Quelques productions d'élèves

88 44 ~~22~~

nicolas lucas Jeanne

$$\begin{array}{r} 1 \\ 88 \\ +44 \\ +22 \\ \hline 154 \end{array}$$

On a commencer en faisen 100 pour nicolas et lucas
50 et Jeanne 25. Mais ça ne marchais pas ça
faisait 175. En deuxième on a fait 20, 20, 20
Après on a fait 26 pour nicolas, lucas, nicolas, nicolas,
lucas, Jeanne

2 élèves de CM1-CM2 en autonomie.

Quelques productions d'élèves

The image shows two sheets of paper with handwritten mathematical work. The left sheet contains three addition problems. The first is circled in red and shows the sum of 22, 44, and 88 to get 154. The second shows 19 plus 38 plus 76 to get 152. The third shows 21 plus 21 plus 42 plus 42 to get 168. The right sheet contains a red calculation for 154 (10+1+5+3+10+10+10+2+1+1+1+1=54), a word problem about apples owned by Jeanne, Lucas, and Elvira, and a diagram showing the sum of 22, 44, and 88 to get 154.

Left Sheet:

①
$$\begin{array}{r} 22 \\ +44 \\ +88 \\ \hline 154 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ +40 \\ +80 \\ \hline 140 \end{array}$$

②
$$\begin{array}{r} 19 \\ +38 \\ +76 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ \hline 42 \\ +42 \\ \hline 84 \\ +84 \\ \hline 168 \end{array}$$

Right Sheet:

154 pommes

Lucas = $10+1+5+3+10+10+10+2+1+1+1+1=54$

Jeanne a 22 pommes.
Lucas a 44 pommes.
Elvira a 88 pommes.

$$22 + 44 + 88 = 154$$

2 élèves de CM1-CM2 en autonomie.

Stratégies adoptées face au problème des chataîgnes

- ▶ Toujours, tâtonnement et ajustement.
- ▶ Certaines procédures (qui n'apparaissent pas ci-dessus) consistent à diviser le nombre 154 pour démarrer une procédure de division quotient. Souvent elles n'aboutissent pas et sont abandonnées.

La procédure experte

Ce problème est traitable par une division au cycle 4, grâce au calcul littéral.

Soit j le nombre de châtaignes de Jeanne, n le nombre de châtaignes de Nicolas, l le nombre de châtaignes de Lucas. Nous savons que $l = 2 \times j$, et que $l = \frac{1}{2} \times n$, autrement dit $n = 2 \times l = 4 \times j$. De plus,

$$l + j + n = 154$$

Donc

$$2 \times j + 4 \times j + j = 7 \times j = 154$$

Donc $j = 154 \div 7 = 22$. Et $l = 44$, $j = 88$.

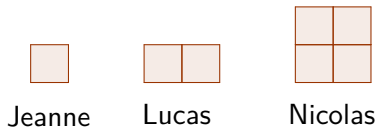
Exercice

En s'inspirant de la résolution ci-dessous, présenter une correction du problème accessible à des élèves de cycle 3 utilisant le vocabulaire de la division-quotition.

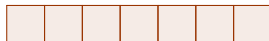
Résolution experte du problème des châtaignes

On va mettre les châtaignes dans des paquets qui ont chacun autant de châtaignes que le sac de Jeanne.

- ▶ Jeanne a un paquet
- ▶ Lucas a deux paquets
- ▶ Nicolas a 4 paquets



Et les trois amis ont à eux trois sept paquets :



154 châtaignes

Retour sur la feuille d'exercices

Exercice 2

Exercice 2 : Analyse d'erreurs d'élèves

« Pierre a 25 billes, Marc a 32 billes. Marc a plus de billes que Pierre.
Combien en a-t-il de plus que Pierre ? »

Voici les réponses de 3 élèves :

Elève 1 : pas de trace écrite, réponse : 8 billes

Elève 2 : il calcule en colonne $25+32$ et trouve 57 billes

Elève 3 : il pose en colonne $25-32$ et trouve 13 billes

Analysez ces trois réponses et faites des hypothèses sur leur origine

Exercice 3

Exercice 3 : Les structures des problèmes de type additif

Identifier les différents types de problèmes, les variables didactiques, les éventuelles procédures et difficultés.

1. Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?
2. Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ?
3. Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus(ou de moins) que Charles. Combien Charles en a-t-il ?
4. Jacques a perdu 5 billes, il en a maintenant 22. Combien en avait-il au début de la partie ?
5. Dans une boîte il y a 15 billes : des bleues et des rouges. Il y a 6 billes rouges. Combien y-a-il de bleues ?

Merci pour votre attention.

Crédits : Vincent Beck (Espé Orléans). Sylvie Guffond (CPC, Bonneville, Grenoble), Céline Cerf (CPC, Versailles), Karine Gromaire (PEMF, Versailles).