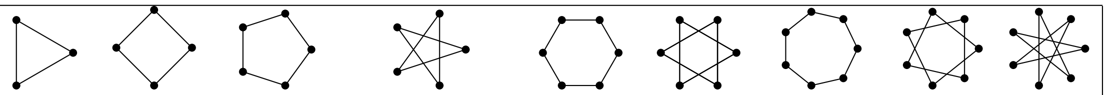
PETIT VOYAGE AU PAYS DES POLYTOPES

Les défis marqué d'un (M) peuvent être faits à la maison.

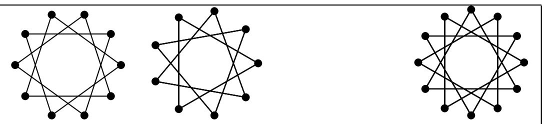
Polygones réguliers: On dit qu'un polygone est régulier s'il est inscriptible dans un cercle et si étant donné deux de ses sommets, il existe toujours une rotation du plan qui envoie le polygone sur lui-même et un sommet sur l'autre. Voici quelques polygones réguliers, certains plus connus que d'autres :



Polygone									
Nom	triangle	carré	pentagone	pentagramme	hexagone		heptagone		
Symbole	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{5/2\}$	$\{6\}$	$2\{3\}$	$\{7\}$	$\{7/2\}$	$\{7/3\}$

(1) Construire $\{3\}$, $\{5\}$ et $\{5/2\}$ avec `Zome`.

(2) (M) Compléter le tableau ci-contre.



Polygone				
Symbole	$2\{4\}$		$2\{5/2\}$	

(3) (M) Soient p et d deux entiers naturels tels que $3 \leqslant d \leqslant p$. À quelle condition sur p et d peut-on dessiner le polygone $\{p/d\}$ sans lever le crayon ?

(4) (M) On veut étendre la définition de polygone régulier. Pour cela
- On s'autorise à considérer des polygones dans l'espace.
- Dans la définition, on remplace « cercle » par « sphère » et « rotation du plan » par « rotation autour d'un axe (Δ) suivie d'une symétrie par rapport au plan perpendiculaire à l'axe (Δ) ». Pouvez-vous trouver de nouveaux polygones vérifiant cette définition ? Lesquels ?

Zonoèdres: Un *zonoèdre* est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones (non nécessairement réguliers) possédant un centre de symétrie. Une *zone* d'un zonoèdre est l'ensemble des arêtes parallèles à une arête donnée du zonoèdre. On dit qu'un zonoèdre est *rhombique* si ses faces sont des losanges. (On rappelle qu'un losange est un quarilatère dont les quatre côtés sont de même longueur, ou bien dons les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.)

(1) Vérifier que le cube est un zonoèdre. Combien a-t-il de zones ?

(2) Construire le plus de losanges possibles avec `Zome`.

(3) Construire le plus de zonoèdres possibles avec `Zome`. Combien ont-ils de zones ?

(4) (M) Montrer que le nombre de faces d'un zonoèdre rhombique est de la forme $z(z-1)$, où $z \geqslant 3$ est un entier. Trouver toutes les valeurs de z possibles.

Polyèdres réguliers: On appelle polyèdre régulier, un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers, qui est inscriptible dans une sphère, et qui apparaît exactement le même quand on regarde en face de chaque sommet en direction du centre de la sphère.[1]

(1) Avec `Zome`, construire un polyèdre régulier dont les faces sont des pentagones, 3 faces se retrouvent en chaque sommet. On l'appelle *dodécaèdre régulier convexe*[2].

Date: 15 décembre 2021.

1. Cette définition est un peu « faite avec les mains ». On peut en donner une meilleure en y passant un peu plus de temps.

2. Convexe signifie que si l'on lâche un ballon de baudruche tout autour du polyèdre, il va bien coller toutes les faces.

(2) Prolonger les arêtes du dodécaèdre régulier convexe. Le résultat est-il un polyèdre régulier ? Si oui, quelles sont ses faces ? Attention, il y a un piège !

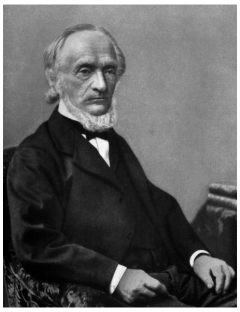
(3) (M) Chercher sur Internet la liste des polyèdres réguliers (y compris ceux de Kepler-Poinsot). Vérifier qu'ils s'obtiennent tous de la manière suivante : on se donne un zonoèdre, et on trace une diagonale sur chacune de ses faces losange.

Polytopes réguliers:

On a parlé de polygones, de polyèdres... mais qu'y a-t-il ensuite ? Au XIXième siècle, Ludwig Schläfli et Alicia Boole Stott notamment se sont posé exactement cette question, et on trouvé toutes les figures *convexes* de l'espace à quatre dimension ou plus qui sont analogues aux polygones et polyèdres réguliers des espaces à deux ou trois dimension. Alicia Boole Stott a nommé ces figures *polytopes*. On sait de nos jours qu'il existe 16 polytopes réguliers de dimension 4 (6 convexes, et 10 non convexes). À l'IMJ, nous construisons un modèle qui représente certaines de ces figures non convexes, projetées dans l'espace à trois dimension.

(1) Trouvez le plus possible de pentagones dans notre modèle. Le but est de prolonger leurs arêtes pour former des pentagrammes.

(2) Aidez-nous à terminer notre projet !



Ludwig Schläfli (1814-1895)

Alicia Boole Stott (1860-1940)

Pour aller plus loin:

(1) Regarder le film à l'adresse `http://www.dimensions-math.org/`

(2) Un peu de bibliographie (plutôt difficile, mais on n'a pas besoin de comprendre tout ce qui est écrit pour apprécier). Les deux premiers sont des livres, et sont au moins en partie accessibles.

— Conway, J.H. ; Burgiel, H. ; Goodman-Strauss, C., *The symmetries of things.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008. xviii+426 pp.
— Coxeter, H. S. M., *Regular polytopes.* Third edition. Dover Publications, Inc., New York, 1973. xiv+321 pp.
— Coxeter, H. S. M., Regular Skew Polyhedra in Three and Four Dimension, and their Topological Analogues. *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), no. 1, 33–62.
— Coxeter, H. S. M., The classification of zonohedra by means of projective diagrams. *J. Math. Pures Appl.* (9) **41** (1962), 137–156.