Géométrie asymptotique sous-linéaire

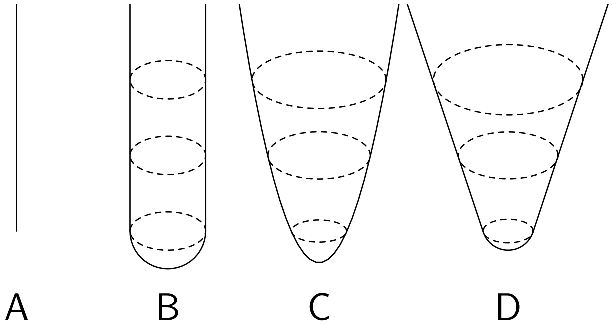
Hyperbolicité, auto-similarité, invariants

Gabriel Pallier

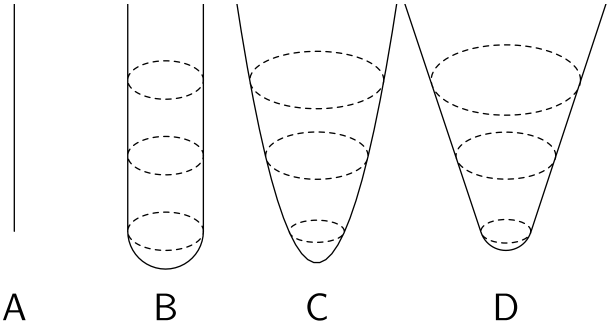
Ecole doctorale mathématiques Hadamard, Orsay.

2 septembre 2019

Géométrie asymptotique

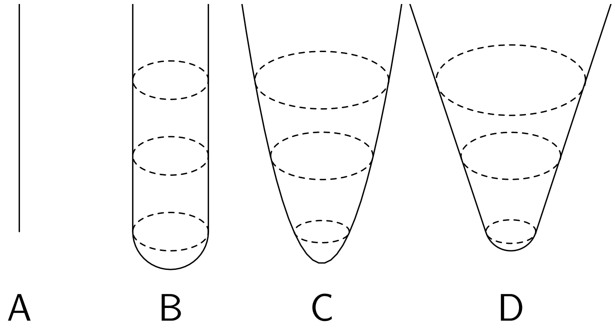


Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

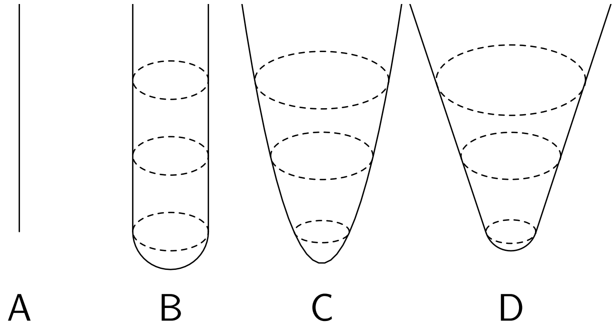
Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

- Si l'on observe au microscope, c'est A.

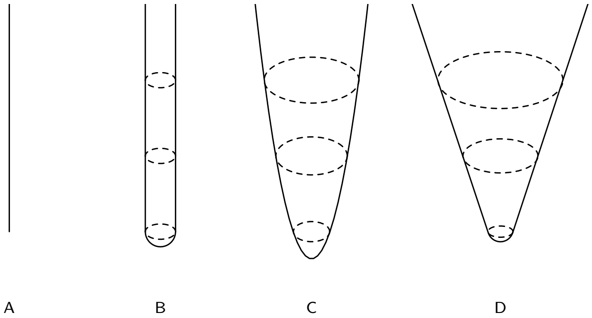
Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

- Si l'on observe au microscope, c'est A.
- Si l'on observe au télescope,

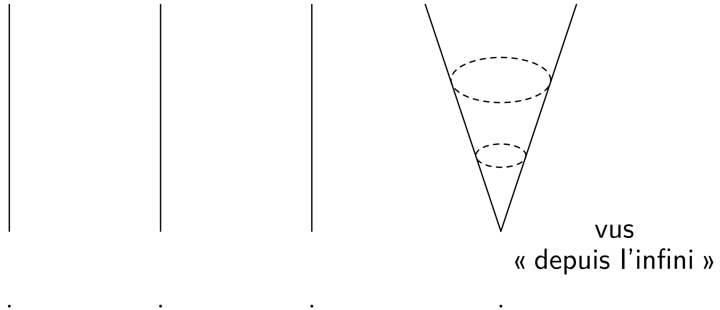
Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

- Si l'on observe au microscope, c'est A.
- Si l'on observe au télescope,

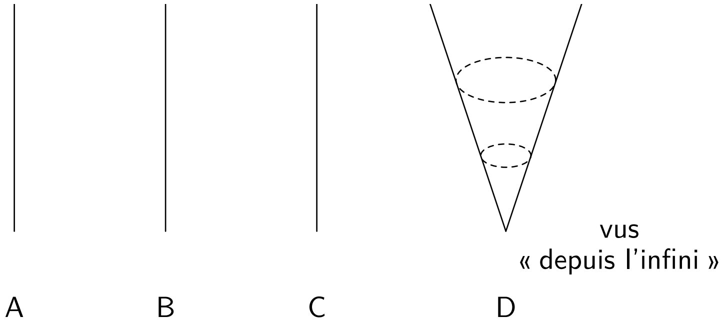
Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

- Si l'on observe au microscope, c'est A.
- Si l'on observe au télescope,

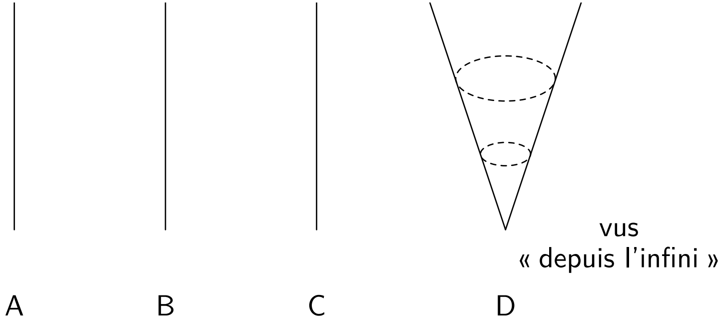
Géométrie asymptotique



Quel est l'intrus ?

- Si l'on observe au microscope, c'est A.
- Si l'on observe au télescope, c'est D,

Géométrie asymptotique

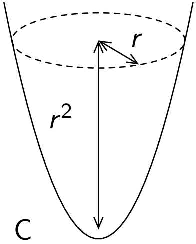


Quel est l'intrus ?

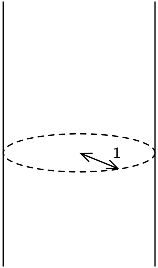
- Si l'on observe au microscope, c'est A.
- Si l'on observe au télescope, c'est D, à condition de ne pas déplacer l'objectif.

Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.

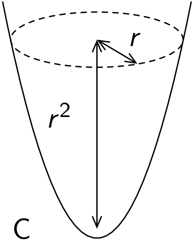


On centre le télescope sur C à hauteur r^2, avec zoom $\times\frac{1}{r}$. Quand $r \to +\infty$, on observe un cylindre. Sur B, on observe toujours une droite ou demi-droite.

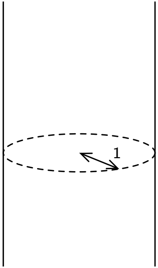


Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.



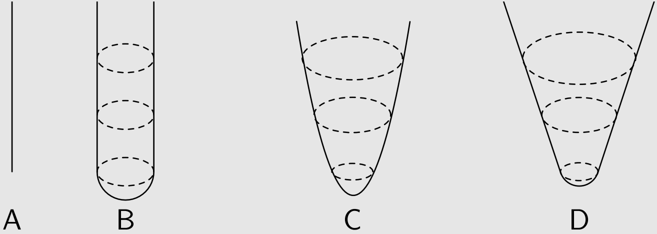
On centre le télescope sur C à hauteur r^2, avec zoom $\times\frac{1}{r}$. Quand $r \to +\infty$, on observe un cylindre. Sur B, on observe toujours une droite ou demi-droite.



Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.

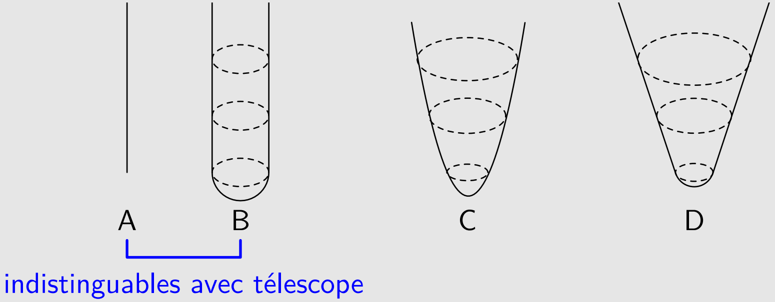
Conclusion



Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.

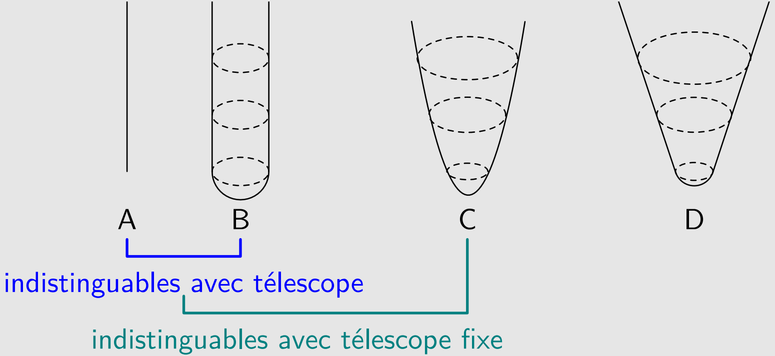
Conclusion



Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.

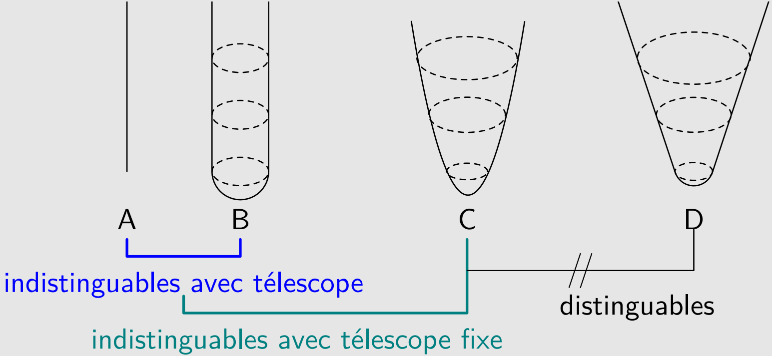
Conclusion



Géométrie asymptotique, suite

En s'autorisant à déplacer l'objectif, on peut distinguer B de C.

Conclusion



Plan de l'exposé

Géométrie asymptotique sous-linéaire

- QI et SBE
- Le cône asymptotique $\mathrm{Cone}_\omega(-)$

Espaces homogènes de courbure négative

- Structure des groupes de Heintze
- Géométrie à grande échelle des groupes de Heintze

Analyse au bord, invariants

- Le bord à l'infini ∂_∞
- Exemples et constructions

Fonctions de Dehn et groupes nilpotents

Géométrie asymptotique sous-linéaire

Quasiisométries et équivalences sous-linéaires

Y, Y' sont des espaces métriques pointés, $\lambda \geqslant 1$.

- $f : Y \to Y'$ est un **homéomorphisme bilipschitzien** si $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall y' \in Y'$,

$$\begin{cases} \lambda^{-1} d(y_1, y_2) \leqslant d(f(y_1), f(y_2)) \leqslant \lambda d(y_1, y_2) \\ y' \in f(Y). \end{cases}$$

Quasiisométries et équivalences sous-linéaires

Y, Y' sont des espaces métriques pointés, $\lambda \geqslant 1$.

- $f : Y \to Y'$ est une **quasiisométrie** (QI) si $\exists c \geqslant 0$ s.t. $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall y' \in Y'$,

$$\begin{cases} \lambda^{-1} d(y_1, y_2) - c \leqslant d(f(y_1), f(y_2)) \leqslant \lambda d(y_1, y_2) + c \\ d(y', f(Y)) \leqslant c. \end{cases}$$

  Les espaces géodésiques propres sur lequel agit géométriquement un même groupe **l**ocalement **c**ompact **c**ompactement en**g**endré (cglc) sont quasiisométriques.

Quasiisométries et équivalences sous-linéaires

Y, Y' sont des espaces métriques pointés, $\lambda \geqslant 1$.

- $f : Y \to Y'$ est une **quasiisométrie** (QI) si $\exists c \geqslant 0$ s.t. $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall y' \in Y'$,

$$\begin{cases} \lambda^{-1} d(y_1, y_2) - c \leqslant d(f(y_1), f(y_2)) \leqslant \lambda d(y_1, y_2) + c \\ d(y', f(Y)) \leqslant c. \end{cases}$$

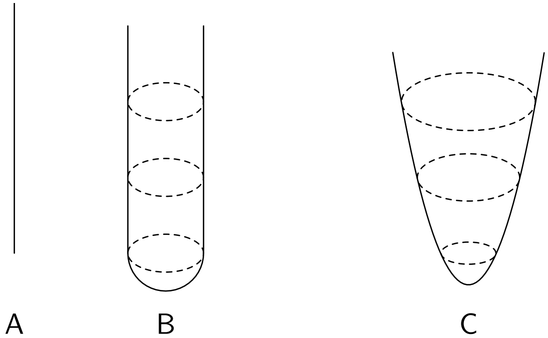
  Les espaces géodésiques propres sur lequel agit géométriquement un même groupe **l**ocalement **c**ompact **c**ompactement en**g**endré (cglc) sont quasiisométriques.

- $f : Y \to Y'$ est une **équivalence sous-linéairement bilipschitzienne** (SBE) s'il existe $v : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \to \mathbf{R}_{\geqslant 1}$ sous linéaire tq $\forall y_1, y_2 \in Y$ and $\forall y' \in Y'$,

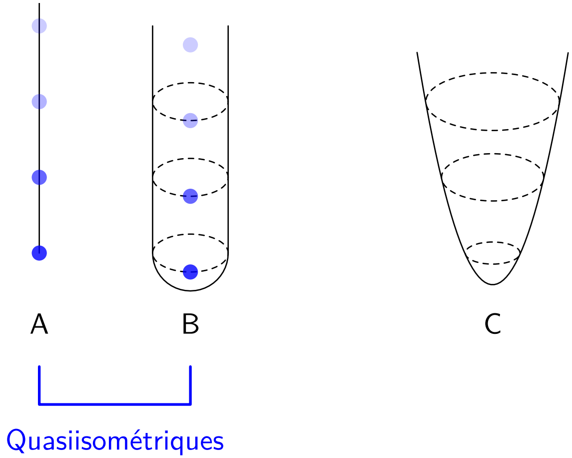
$$\begin{cases} \lambda^{-1} d(y_1, y_2) - v(|y_1| + |y_2|) & \leqslant d(f(y_1), f(y_2)) \\ & \leqslant \lambda d(y_1, y_2) + v(|y_1| + |y_2|) \\ d(y', f(Y)) \leqslant v(|y'|), & \end{cases}$$

  où $|\cdot|$ est la distance au point base.

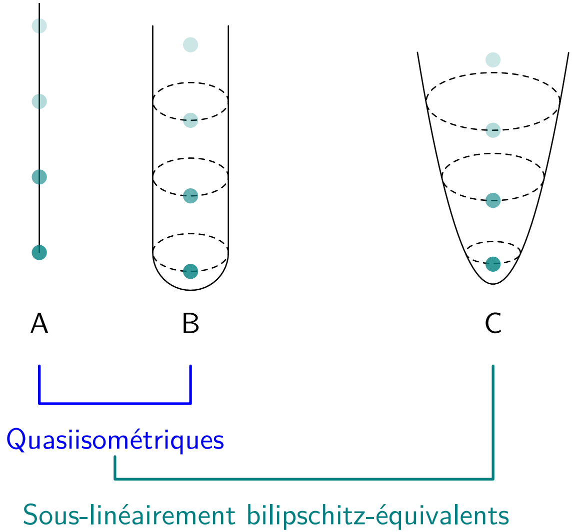
Exemples (non homogènes)



Exemples (non homogènes)



Exemples (non homogènes)



Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- $\mathrm{Precone}(o_j, \sigma)$ est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j, x_j) = O(\sigma_j)$.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- Precone(o_j, σ) est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j, x_j) = O(\sigma_j)$.
- $\mathrm{Cone}_\omega(Y, o, \sigma)$ est défini à partir de $\mathrm{Precone}_\omega(o, \sigma)$ avec la semi-distance $d_\omega([x_j],[y_j]) = \lim_\omega d(x_j, y_j)/\sigma_j$ et en identifiant les points situés à semi-distance nulle.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- $\mathrm{Precone}(o_j,\sigma)$ est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j,x_j)=O(\sigma_j)$.
- $\mathrm{Cone}_\omega(Y,o,\sigma)$ est défini à partir de $\mathrm{Precone}_\omega(o,\sigma)$ avec la semi-distance $d_\omega([x_j],[y_j]) = \lim_\omega d(x_j,y_j)/\sigma_j$ et en identifiant les points situés à semi-distance nulle.

Propriété

Soit $f : Y \to Y'$ une quasiisométrie. Pour tous ω, σ_j, o_j, $\mathrm{Con}_\omega(f) : \mathrm{Cone}_\omega(Y,\sigma_j,o_j) \to \mathrm{Cone}_\omega(Y',\sigma_j,f(o_j))$ est un homéomorphisme bilipschitzien.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- $\mathrm{Precone}(o_j, \sigma)$ est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j, x_j) = O(\sigma_j)$.
- $\mathrm{Cone}_\omega(Y, o, \sigma)$ est défini à partir de $\mathrm{Precone}_\omega(o, \sigma)$ avec la semi-distance $d_\omega([x_j], [y_j]) = \lim_\omega d(x_j, y_j)/\sigma_j$ et en identifiant les points situés à semi-distance nulle.

Propriété

Soit $f : Y \to Y'$ une quasiisométrie. Pour tous ω, σ_j, o_j, $\mathrm{Con}_\omega(f) : \mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma_j, o_j) \to \mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j, f(o_j))$ est un homéomorphisme bilipschitzien.

Propriété (Cornulier)

Soit $f : Y \to Y'$ une équivalence sous-linéairement bilipschitzienne. Pour tous ω, σ_j, o, $\mathrm{Con}_\omega(f) : \mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma_j, o) \to \mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j, f(o))$ est un homéomorphisme bilipschitzien.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- $\mathrm{Precone}(o_j, \sigma)$ est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j, x_j) = O(\sigma_j)$.
- $\mathrm{Cone}_\omega(Y, o, \sigma)$ est défini à partir de $\mathrm{Precone}_\omega(o, \sigma)$ avec la semi-distance $d_\omega([x_j], [y_j]) = \lim_\omega d(x_j, y_j)/\sigma_j$ et en identifiant les points situés à semi-distance nulle.

Propriété

Soit $f : Y \to Y'$ une quasiisométrie. Pour tous ω, σ_j, o_j, $\mathrm{Con}_\omega(f) : \mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma_j, o_j) \to \mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j, f(o_j))$ est un homéomorphisme bilipschitzien.

Propriété

Si Y et Y' sont homogènes et $f : Y \to Y'$ est une SBE alors $\mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma)$ et $\mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j)$ sont bilipschitziennement homéomorphes pour tout ω, σ_j.

Cône asymptotique, QI et SBE

(Gromov, van den Dries, Wilkie)

Soit Y un espace métrique, soit $(o_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de points-bases dans Y, soit $(\sigma_j)_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ une suite de facteurs de normalisation de limite infinie. Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

- $\mathrm{Precone}(o_j, \sigma)$ est constitué des suites (x_j) telles que $d(o_j, x_j) = O(\sigma_j)$.
- $\mathrm{Cone}_\omega(Y, o, \sigma)$ est défini à partir de $\mathrm{Precone}_\omega(o, \sigma)$ avec la semi-distance $d_\omega([x_j], [y_j]) = \lim_\omega d(x_j, y_j)/\sigma_j$ et en identifiant les points situés à semi-distance nulle.

Propriété

Soit $f : Y \to Y'$ une quasiisométrie. Pour tous ω, σ_j, o_j, $\mathrm{Con}_\omega(f) : \mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma_j, o_j) \to \mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j, f(o_j))$ est un homéomorphisme bilipschitzien.

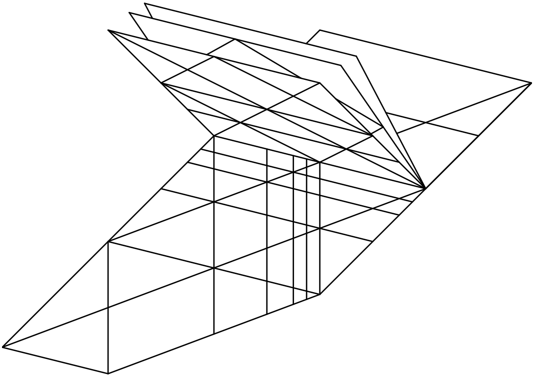
Propriété

Si Y et Y' sont homogènes et $f : Y \to Y'$ est une SBE alors $\mathrm{Cone}_\omega(Y, \sigma)$ et $\mathrm{Cone}_\omega(Y', \sigma_j)$ sont bilipschitziennement homéomorphes pour tout ω, σ_j.

A partir de maintenant tous les espaces seront homogènes

Que faire avec un homéomorphisme bilipschitzien ?

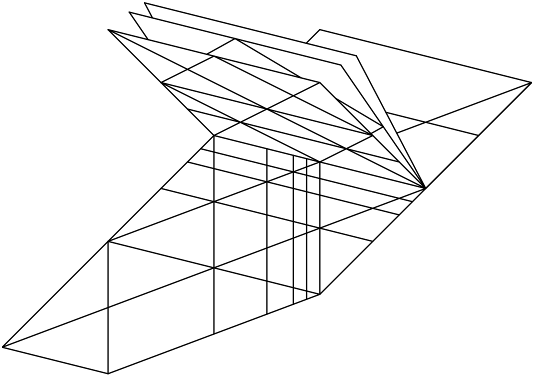
Homéomorphisme : topologie, π_1, groupes d'homologie locaux.



Portion d'immeuble euclidien

Que faire avec un homéomorphisme bilipschitzien ?

Homéomorphisme : topologie, π_1, groupes d'homologie locaux.



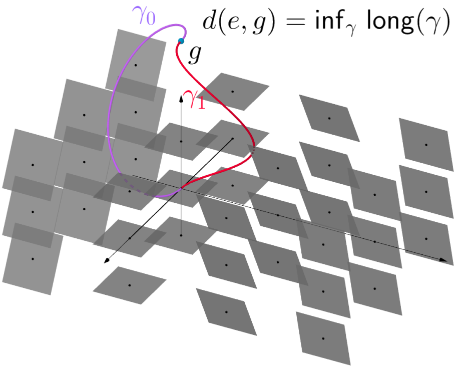
Portion d'immeuble euclidien

Théorème (Kleiner-Leeb)

Un homéomorphisme entre immeubles euclidiens **de rang** $\geqslant 2$ dont la partie de translation du groupe de Weyl est d'orbite dense sur les appartements est une homothétie.

Que faire avec un homéomorphisme bilipschitzien ?

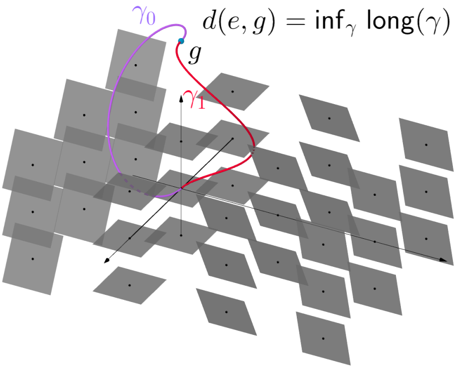
Homéomorphisme : topologie, π_1, groupes d'homologie locaux.
Bilipschitzien : analyse, si le cône est localement compact et géodésique.



Métrique CC sur le groupe d'Heisenberg

Que faire avec un homéomorphisme bilipschitzien ?

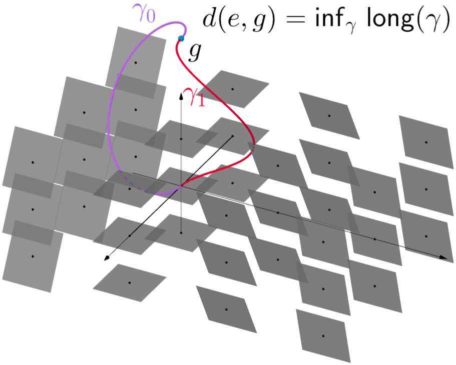
Homéomorphisme : topologie, π_1, groupes d'homologie locaux.
Bilipschitzien : analyse, si le cône est localement compact et géodésique.



Métrique CC sur le groupe d'Heisenberg

Que faire avec un homéomorphisme bilipschitzien ?

Homéomorphisme : topologie, π_1, groupes d'homologie locaux.
Bilipschitzien : analyse, si le cône est localement compact et géodésique.



Métrique CC sur le groupe d'Heisenberg

Théorème (Pansu)

Un homéomorphisme bilipschitzien entre deux métriques de Carnot-Carathéodory sur des groupes nilpotents gradués est presque partout différentiable (au sens de Pansu).

Classification SBE des espaces homogènes

Le problème est vaste.
Propriétés invariantes, pour les groupes cglc.

Propriété		**Invariance**	Caractérisée des cônes
Hyperbolicité		Oui	Oui (**R**-arbre) Gromov
Croissance	linéaire	Oui	Oui (**R**) Druțu-Sapir
	polynomiale	Oui	Oui (métrique CC) ...
	sous-exponentielle	Oui Cornulier	?
Moyennabilité + unimodularité		**?**	?

Classification SBE des espaces homogènes

Le problème est vaste.
Propriétés invariantes, pour les groupes cglc.

Propriété		**Invariance**	Caractérisée des cônes
Hyperbolicité		Oui	Oui ($\mathbf{R}$-arbre) Gromov
Croissance	linéaire	Oui	Oui ($\mathbf{R}$) Druțu-Sapir
	polynomiale	Oui	Oui (métrique CC) ...
	sous-exponentielle	Oui Cornulier	?
Moyennabilité + unimodularité		**?**	?

La classification est **connue** du côté « croissance polynomiale »

Classification des groupes cglc à croissance polynomiale

Théorème (Breuillard, Cornulier, unicité Pansu)

Soit G un groupe cglc à croissance polynomiale. Il existe un groupe de Lie nilpotent Carnot-gradué G_∞, unique à isomorphisme près, tel que $G \underset{SBE}{\sim} G_\infty$. De plus il existe γ, $0 \leqslant \gamma < 1$ tel que $G \underset{O(r^\gamma)-SBE}{\sim} G_\infty$.

Classification des groupes cglc à croissance polynomiale

Théorème (Breuillard, Cornulier, unicité Pansu)

Soit G un groupe cglc à croissance polynomiale. Il existe un groupe de Lie nilpotent Carnot-gradué G_∞, unique à isomorphisme près, tel que $G \underset{SBE}{\sim} G_\infty$. De plus il existe γ, $0 \leqslant \gamma < 1$ tel que $G \underset{O(r^\gamma)-SBE}{\sim} G_\infty$.

Corollaire

G et G' cglc à croissance polynomiale, sont SBE si et seulement si G_∞ et G'_∞ sont isomorphes.

Classification des groupes cglc à croissance polynomiale

Théorème (Breuillard, Cornulier, unicité Pansu)

Soit G un groupe cglc à croissance polynomiale. Il existe un groupe de Lie nilpotent Carnot-gradué G_∞, unique à isomorphisme près, tel que $G \underset{SBE}{\sim} G_\infty$. De plus il existe γ, $0 \leqslant \gamma < 1$ tel que $G \underset{O(r^\gamma)-SBE}{\sim} G_\infty$.

Corollaire

G et G' cglc à croissance polynomiale, sont SBE si et seulement si G_∞ et G'_∞ sont isomorphes.

Remarque

La classification à quasiisométrie près n'est pas connue.

Espaces homogènes de courbure négative

Espaces homogènes de courbure < 0

- (Wolf 1964) Soit M une variété riemanienne simplement connexe homogène de courbure $\leqslant 0$. Il existe un groupe de Lie résoluble S qui agit simplement transitivement sur M.

Espaces homogènes de courbure < 0

- (Wolf 1964) Soit M une variété riemanienne simplement connexe homogène de courbure $\leqslant 0$. Il existe un groupe de Lie résoluble S qui agit simplement transitivement sur M.
- Soit S un groupe de Lie résoluble connexe simplement connexe. Il existe $r \geqslant 0$ et
$$1 \to N \to S \to \mathbf{R}^r \to 1, \tag{$\star$}$$
où N est le nilradical (maximal nilpotent normal connexe) de S.

Espaces homogènes de courbure < 0

- (Wolf 1964) Soit M une variété riemanienne simplement connexe homogène de courbure $\leqslant 0$. Il existe un groupe de Lie résoluble S qui agit simplement transitivement sur M.
- Soit S un groupe de Lie résoluble connexe simplement connexe. Il existe $r \geqslant 0$ et
$$1 \to N \to S \to \mathbf{R}^r \to 1, \tag{$\star$}$$
où N est le nilradical (maximal nilpotent normal connexe) de S.

Théorème (Heintze 1974) et définition

Soit M de courbure < 0 et S comme dans le théorème de Wolf. Alors

- ($\star$) se scinde, $r = 1$, et $\mathbf{R} \curvearrowright N$ est telle que $t.n = e^{t\alpha} n$ où $\alpha \in \mathrm{Der}(\mathrm{Lie}(N))$ avec $\Re\lambda > 0$ pour toute λ valeur propre de α.
- Tout tel S admet une telle opération (donc une métrique à $K < 0$). On l'appelle **groupe de Heintze**. Si N est abélien, S est **métabélien**.

Espaces homogènes de courbure < 0

- (Wolf 1964) Soit M une variété riemanienne simplement connexe homogène de courbure $\leqslant 0$. Il existe un groupe de Lie résoluble S qui agit simplement transitivement sur M.
- Soit S un groupe de Lie résoluble connexe simplement connexe. Il existe $r \geqslant 0$ et

$$1 \to N \to S \to \mathbf{R}^r \to 1, \qquad (\star)$$

où N est le nilradical (maximal nilpotent normal connexe) de S.

Théorème (Heintze 1974) et définition

Soit M de courbure < 0 et S comme dans le théorème de Wolf. Alors

- $(\star)$ se scinde, $r = 1$, et $\mathbf{R} \curvearrowright N$ est telle que $t.n = e^{t\alpha} n$ où $\alpha \in \mathrm{Der}(\mathrm{Lie}(N))$ avec $\Re\lambda > 0$ pour toute λ valeur propre de α.
- Tout tel S admet une telle opération (donc une métrique à $K < 0$). On l'appelle **groupe de Heintze**. Si N est abélien, S est **métabélien**.

Sans perte de généralité pour nous, α aura désormais spectre réel.

Petite dimension

Les groupes de Heintze de dimension 3 ont $N = \mathbf{R}^2$. Ce sont des $\mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$, classifiés par la forme de Jordan de α modulo normalisation.

Petite dimension

Les groupes de Heintze de dimension 3 ont $N = \mathbf{R}^2$. Ce sont des $\mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$, classifiés par la forme de Jordan de α modulo normalisation.

- α est **diagonalisable** : soit $\mu \geqslant 1$, $S_\mu = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

- α est **unipotente** : $S' = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Petite dimension

Les groupes de Heintze de dimension 3 ont $N = \mathbf{R}^2$. Ce sont des $\mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$, classifiés par la forme de Jordan de α modulo normalisation.

- α est **diagonalisable** : soit $\mu \geqslant 1$, $S_\mu = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

- α est **unipotente** : $S' = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

S_1 porte une métrique symétrique, l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$.

Petite dimension

Les groupes de Heintze de dimension 3 ont $N = \mathbf{R}^2$. Ce sont des $\mathbf{R} \ltimes_\alpha \mathbf{R}^2$, classifiés par la forme de Jordan de α modulo normalisation.

- α est **diagonalisable** : soit $\mu \geqslant 1$, $S_\mu = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

- α est **unipotente** : $S' = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp\left[t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

S_1 porte une métrique symétrique, l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$. Pour S', le pincement des métriques invariantes peut être arbitrairement proche de 1.

Espaces symétriques et groupes de Heintze focaux

$M = G/K$ espace symétrique de courbure sect. < 0 (donc rang un), $G = KAN$. $S = AN$ groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur M.

Espaces symétriques et groupes de Heintze focaux

$M = G/K$ espace symétrique de courbure sect. < 0 (donc rang un), $G = KAN$. $S = AN$ groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur M.

Espaces symétriques et groupes de Heintze focaux

$M = G/K$ espace symétrique de courbure sect. < 0 (donc rang un), $G = KAN$. $S = AN$ groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur M.

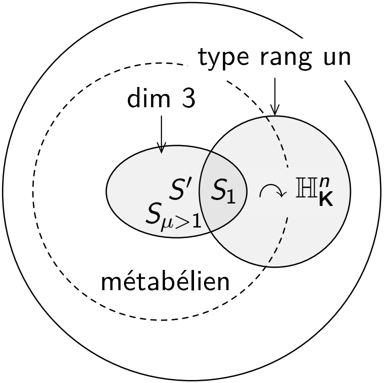
Exemples :
$A = \mathbf{R}^1$, $N = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}$.
$A = \mathbf{R}^1$, $N = \text{Heisenberg}^{2n+1}$,
$Y = \mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}$.

Espaces symétriques et groupes de Heintze focaux

$M = G/K$ espace symétrique de courbure sect. < 0 (donc rang un), $G = KAN$. $S = AN$ groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur M.

Exemples :
$A = \mathbf{R}^1$, $N = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{R}}$.
$A = \mathbf{R}^1$, $N = \text{Heisenberg}^{2n+1}$, $Y = \mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{C}}$.

L'opération sur la sphère à l'infini de M est dite focale ; un point ω est sur l'axe de tous les éléments hyperboliques



Typologie des groupes de Heintze

Géométrie à grande échelle des groupes de Heintze

Soit $\{S, T\}$ une paire de groupes de Heintze **purement réels**.

$$\begin{tikzcd}
S, T \text{ sont isomorphes} \arrow[d, Rightarrow, "(a)"] \\
S, T \text{ sont QI} \arrow[d, Rightarrow, "(b)"] \arrow[u, Rightarrow, bend right, "?"'] \\
S, T \text{ sont SBE}
\end{tikzcd}$$

Géométrie à grande échelle des groupes de Heintze

Soit $\{S, T\}$ une paire de groupes de Heintze **purement réels**.

$$\begin{tikzcd}
S, T \text{ sont isomorphes} \arrow[d, Rightarrow, "(a)"] \\
S, T \text{ sont QI} \arrow[d, Rightarrow, "(b)"] \arrow[u, Rightarrow, bend right, "?"'] \\
S, T \text{ sont SBE}
\end{tikzcd}$$

- Réciproque de (a) ouverte, connue si de plus S de type Carnot (Pansu + Carrasco Piaggio) ou si S, T métabéliens (Xie).

Géométrie à grande échelle des groupes de Heintze

Soit $\{S, T\}$ une paire de groupes de Heintze **purement réels**.

$$\begin{tikzcd}
S, T \text{ sont isomorphes} \arrow[d, Rightarrow, "(a)"] \\
S, T \text{ sont QI} \arrow[d, Rightarrow, "(b)"] \arrow[u, Rightarrow, bend right=60, "?"'] \\
S, T \text{ sont SBE}
\end{tikzcd}$$

- Réciproque de (a) ouverte, connue si de plus S de type Carnot (Pansu + Carrasco Piaggio) ou si S, T métabéliens (Xie).
- Pas de réciproque de (b) : $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ et S' sont $O(\log)$-SBE (Cornulier).

Géométrie à grande échelle des groupes de Heintze

Soit $\{S, T\}$ une paire de groupes de Heintze **purement réels**.

$$\begin{tikzcd}
S, T \text{ sont isomorphes} \arrow[d, Rightarrow, "(a)"] \\
S, T \text{ sont QI} \arrow[d, Rightarrow, "(b)"] \arrow[u, Rightarrow, bend right=60, "?"'] \\
S, T \text{ sont SBE}
\end{tikzcd}$$

- Réciproque de (a) ouverte, connue si de plus S de type Carnot (Pansu + Carrasco Piaggio) ou si S, T métabéliens (Xie).
- Pas de réciproque de (b) : $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ et S' sont $O(\log)$-SBE (Cornulier).

Théorème I

Si S et T ont une métrique symétrique et sont SBE, alors S et T sont isomorphes.

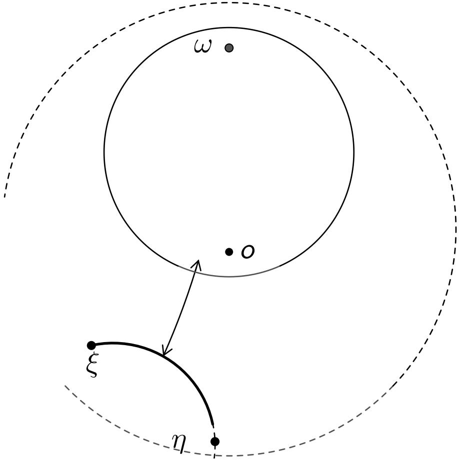
Théorème II

Supposons S et T métabéliens de dérivations α_S, α_T diagonalisables. Si S et T sont SBE alors ils sont isomorphes.

Analyse au bord, invariants

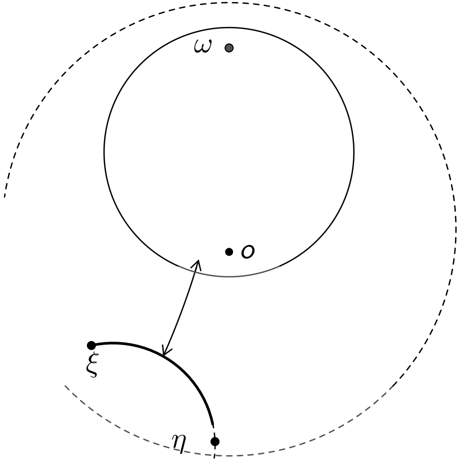
Bord d'un groupe de Heintze

$S \curvearrowright M$, simple transitive.
$\omega \in \partial_\infty M$ point focal.



Bord d'un groupe de Heintze

$S \curvearrowright M$, simple transitive. $\omega \in \partial_\infty M$ point focal. Le bord privé de ω (et les horosphères) sont des espaces homogènes de N.

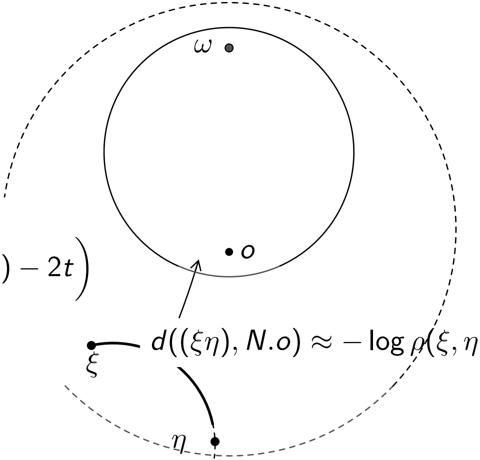


Bord d'un groupe de Heintze

$S \curvearrowright M$, simple transitive. $\omega \in \partial_\infty M$ point focal. Le bord privé de ω (et les horosphères) sont des espaces homogènes de N.
Fixons $o \in M$. On définit

$$\rho(\xi, \eta) := \exp\left(\frac{-1}{2} \lim_{t \to +\infty} d_M(\xi_t, \eta_t) - 2t\right)$$

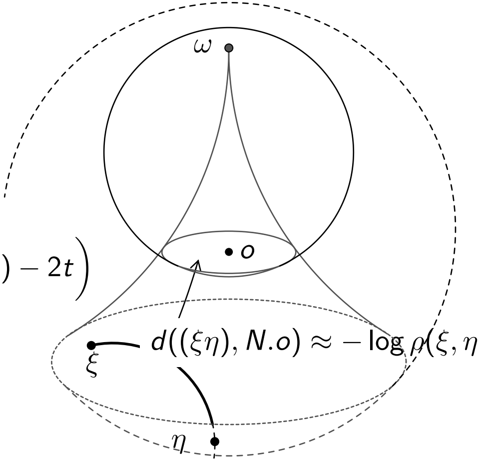
noyau d'Euclide-Cygan (Paulin, Hersonsky) pour $\{\xi_t\}, \{\eta_t\}$ géodésiques avec $\xi_\infty = \eta_\infty = \omega$ et $\xi_0, \eta_0 \in N.o$.



Bord d'un groupe de Heintze

$S \curvearrowright M$, simple transitive. $\omega \in \partial_\infty M$ point focal. Le bord privé de ω (et les horosphères) sont des espaces homogènes de N.
Fixons $o \in M$. On définit

$$\rho(\xi, \eta) := \exp\left(\frac{-1}{2}\lim_{t \to +\infty} d_M(\xi_t, \eta_t) - 2t\right)$$

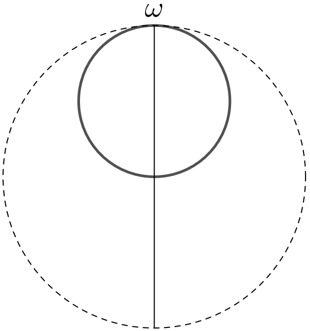


noyau d'Euclide-Cygan (Paulin, Hersonsky) pour $\{\xi_t\}, \{\eta_t\}$ géodésiques avec $\xi_\infty = \eta_\infty = \omega$ et $\xi_0, \eta_0 \in N.o$.
Sur tout $\Omega \subset \partial_\infty M$ t.q. $\omega \notin \overline{\Omega}$, ρ est biLipschitz-équivalent à une métrique visuelle.

Sur le noyau d'Euclide-Cygan

Pour tous $\xi_0, \xi_1 \in \partial_\infty^* M = \partial_\infty M$,

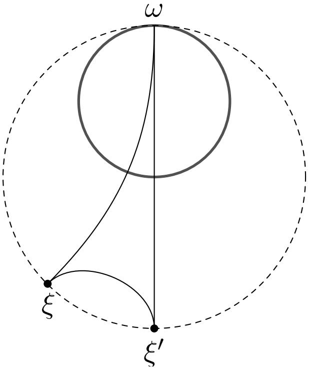
$$\rho(e^{\alpha t}\xi_0, e^{\alpha t}\xi_1) = e^t \rho(\xi_0, \xi_1).$$



Sur le noyau d'Euclide-Cygan

Pour tous $\xi_0, \xi_1 \in \partial_\infty^* M = \partial_\infty M$,

$$\rho(e^{\alpha t}\xi_0, e^{\alpha t}\xi_1) = e^t \rho(\xi_0, \xi_1).$$

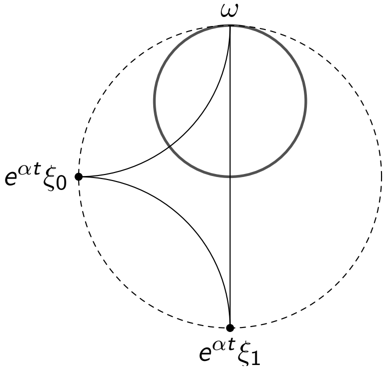


Sur le noyau d'Euclide-Cygan

Pour tous $\xi_0, \xi_1 \in \partial_\infty^* M = \partial_\infty M$,

$$\rho(e^{\alpha t}\xi_0, e^{\alpha t}\xi_1) = e^t \rho(\xi_0, \xi_1).$$

Muni de ρ, ∂_∞^* est **auto-similaire**
Ses auto-similarités sont les $e^{\alpha t}$. On notera ici l'espace autosimilaire correspondant $(N, \langle\alpha\rangle)$.

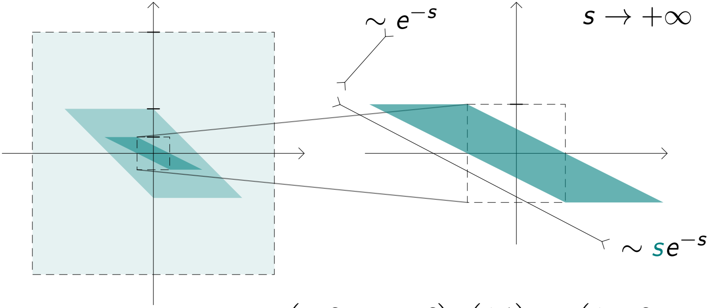


Approx. des petites boules de ρ dessinées sur $\mathbf{R}^2$

Groupe auto-similarités	S isom. $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$	S'	S_μ $(\mu > 1)$
	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\right\}$

Approx. des petites boules de ρ dessinées sur $\mathbf{R}^2$

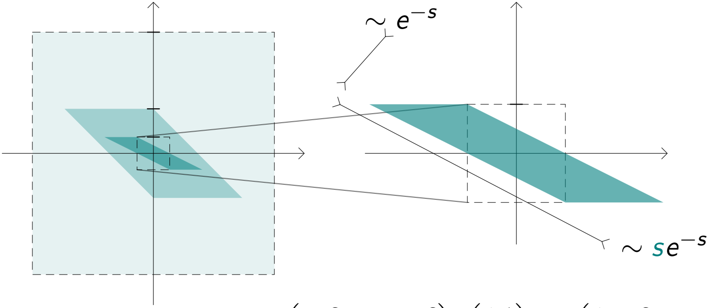
Groupe auto-similarités	S isom. $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$	S'	S_μ $(\mu > 1)$
	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\right\}$



$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \mp se^{-s} \\ \pm e^{-s} \end{pmatrix}$$

Approx. des petites boules de ρ dessinées sur $\mathbf{R}^2$

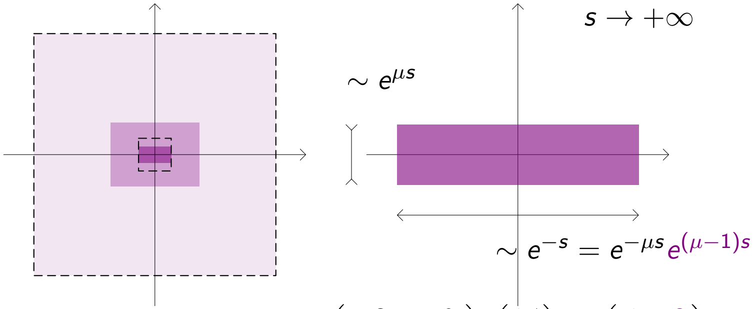
Groupe auto-similarités	S isom. $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$	S'	S_μ $(\mu > 1)$
	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\right\}$



$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \mp se^{-s} \\ \pm e^{-s} \end{pmatrix}$$

Approx. des petites boules de ρ dessinées sur $\mathbf{R}^2$

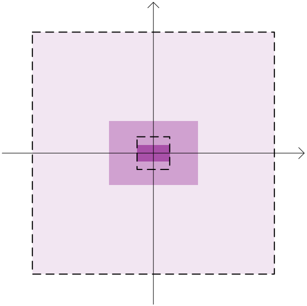
Groupe auto-similarités	S isom. $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$	S'	S_μ $(\mu > 1)$
	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\right\}$

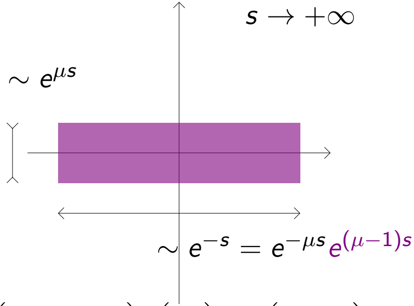


$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -0 \\ 0 & e^{-\mu s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \\ \pm e^{-\mu s} \end{pmatrix}$$

Approx. des petites boules de ρ dessinées sur $\mathbf{R}^2$

Groupe auto-similarités	S isom. $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$	S'	S_μ $(\mu > 1)$
	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}\right\}$





$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -0 \\ 0 & e^{-\mu s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \\ \pm e^{-\mu s} \end{pmatrix}$$

Quasiisométries et sphère à l'infini

Soit $\tau \geqslant 0$. Un couple d'ensembles (a, a^+) dans un espace quasimétrique est une τ-**couronne** intérieure s'il y a une boule B telle que $B \subseteq a \subseteq a^+ \subseteq e^\tau B$. rayon$(B)$ est un **rayon interne** et τ une **asphéricité** pour (a, a^+).
Un homéomorphisme est dit quasisymétrique s'il **préserve l'asphéricité bornée**, c-à-d. toute τ-couronne est envoyée sur une famille de τ'-couronne avec τ' ne dépendant que de τ.

Quasiisométries et sphère à l'infini

Soit $\tau \geqslant 0$. Un couple d'ensembles (a, a^+) dans un espace quasimétrique est une τ-**couronne** intérieure s'il y a une boule B telle que $B \subseteq a \subseteq a^+ \subseteq e^\tau B$. rayon$(B)$ est un **rayon interne** et τ une **asphéricité** pour (a, a^+).
Un homéomorphisme est dit quasisymétrique s'il **préserve l'asphéricité bornée**, c-à-d. toute τ-couronne est envoyée sur une famille de τ'-couronne avec τ' ne dépendant que de τ.

Théorèmes

Soient S et S' des groupes hyperboliques opérant géométriquement sur M, M'. Soit $f : M \to M'$ une quasiisométrie. Il existe un homéomorphisme $\partial_\infty f : \partial_\infty M \to \partial_\infty M'$ (Efremovich -Tihomirova), qui est quasisymétrique (Mostow-Margulis essentiellement).

SBE au bord de Gromov

Soit $s_n \to +\infty$. Une famille de couronnes (a_n, a_n^+) de $(\partial_\infty^*, \rho)$ de rayons internes e^{-s_n} et d'asphéricités τ_n est **d'asphéricité sous-linéaire** si $\tau_n \ll |s_n|$ (quantitativement : $\tau_n = O(v(s_n))$).

SBE au bord de Gromov

Soit $s_n \to +\infty$. Une famille de couronnes (a_n, a_n^+) de $(\partial_\infty^*, \rho)$ de rayons internes e^{-s_n} et d'asphéricités τ_n est **d'asphéricité sous-linéaire** si $\tau_n \ll |s_n|$ (quantitativement : $\tau_n = O(v(s_n))$).

Définition

Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **preservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

SBE au bord de Gromov

Soit $s_n \to +\infty$. Une famille de couronnes (a_n, a_n^+) de $(\partial_\infty^*, \rho)$ de rayons internes e^{-s_n} et d'asphéricités τ_n est **d'asphéricité sous-linéaire** si $\tau_n \ll |s_n|$ (quantitativement : $\tau_n = O(v(s_n))$).

Définition

Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **preservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

Théorèmes

Les SBE se prolongent à $\partial_\infty M$ (ou au bord de Gromov), quantitativement

1. (Cornulier 2017) en homéomorphismes biHölder.

SBE au bord de Gromov

Soit $s_n \to +\infty$. Une famille de couronnes (a_n, a_n^+) de $(\partial_\infty^*, \rho)$ de rayons internes e^{-s_n} et d'asphéricités τ_n est **d'asphéricité sous-linéaire** si $\tau_n \ll |s_n|$ (quantitativement : $\tau_n = O(v(s_n))$).

Définition

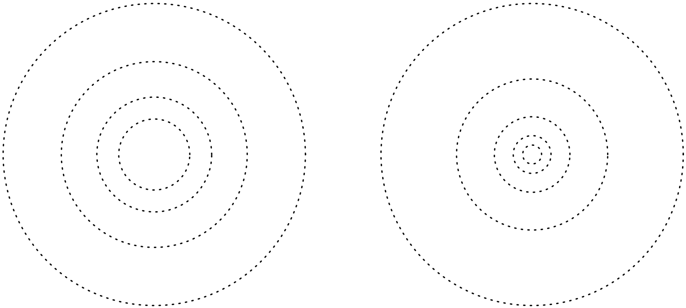
Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **preservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

Théorèmes

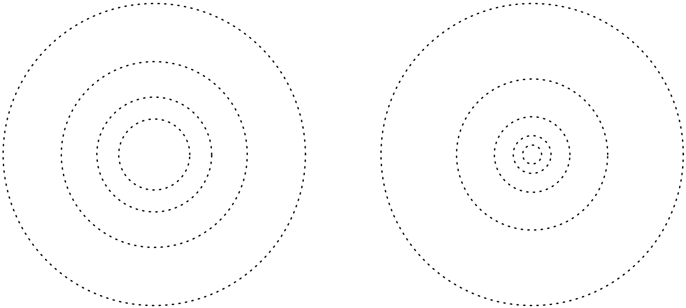
Les SBE se prolongent à $\partial_\infty M$ (ou au bord de Gromov), quantitativement

1. (Cornulier 2017) en homéomorphismes biHölder.
2. (P.) en homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques.

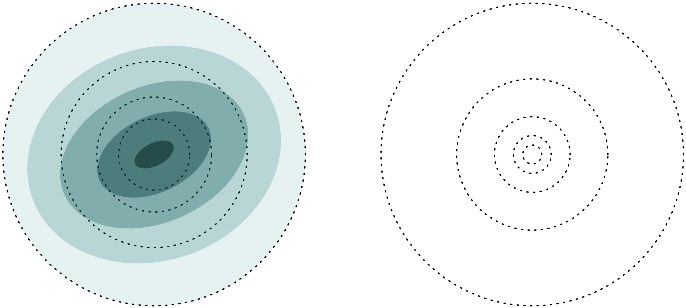
L'asphéricité sous-linéaire est préservée



L’asphéricité sous-linéaire est préservée

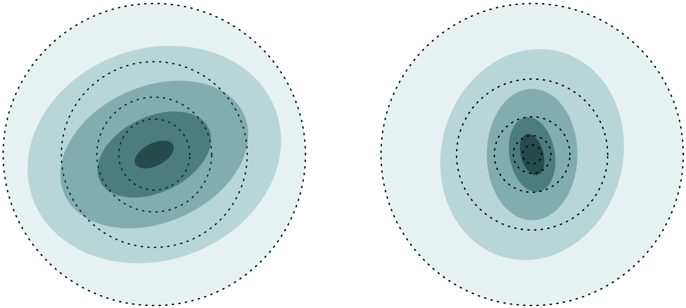


L'asphéricité sous-linéaire est préservée



$\tau_n = O(\sqrt{n})$

L'asphéricité sous-linéaire est préservée



$\tau_n = O(\sqrt{n})$ $\qquad$ $\tau'_n = O(\sqrt{n})$

Figure – Homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique de $\mathbf{R}^2$ euclidien préservant l'asphéricité de classe $O(\sqrt{n})$

Exemple

Observation (Cornulier)

S_1 et S' sont SBE.

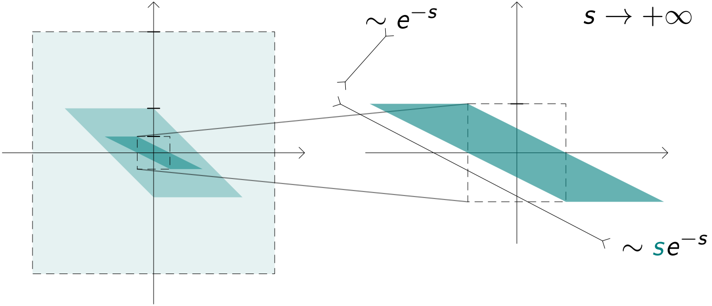
Au bord : l'identité $\left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) \to \left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right)$ est sous-linéairement quasisymétrique (sur tout ouvert relativement compact).

Exemple

Observation (Cornulier)

S_1 et S' sont SBE.

Au bord : l'identité $\left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right) \to \left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right)$ est sous-linéairement quasisymétrique (sur tout ouvert relativement compact).



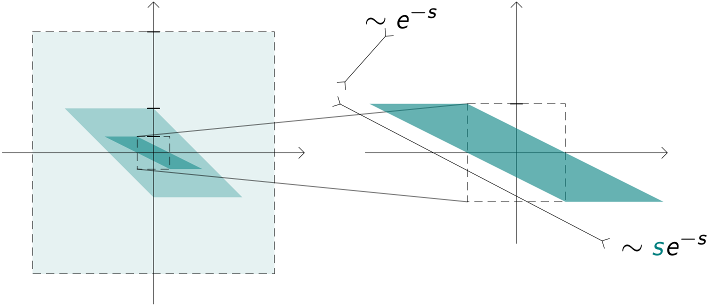
$$\tau = O(\log(s))$$

Exemple

Observation (Cornulier)

S_1 et S' sont SBE.

Au bord : l'identité $\left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) \to \left(\mathbf{R}^2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right)$ est sous-linéairement quasisymétrique (sur tout ouvert relativement compact).



$$\tau = O(\log(s))$$

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$,

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

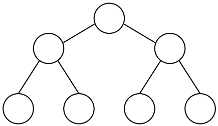
Ingrédients

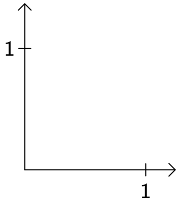
- La mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans** ℓ^1,

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans** ℓ^1,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.



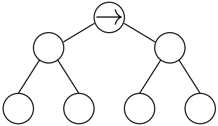


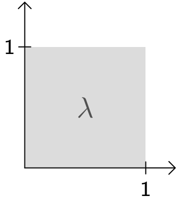
Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans ℓ^1**,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.

1$^{\text{ère}}$ étape Construction d'une mesure M sur $[0,1]$.



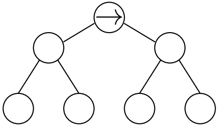


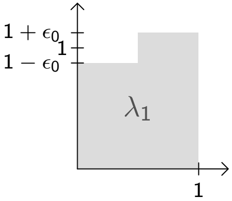
Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans** ℓ^1,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.

1ère étape Construction d'une mesure M sur $[0, 1]$.



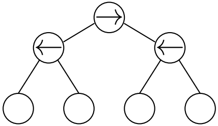


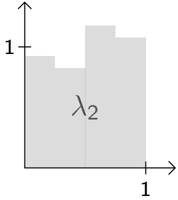
Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans ℓ^1**,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.

1ère étape Construction d'une mesure M sur $[0,1]$.



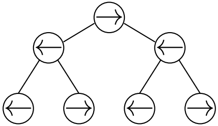


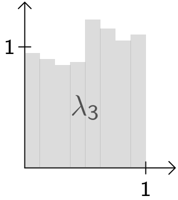
Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans ℓ^1**,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.

1ère étape Construction d'une mesure M sur $[0,1]$.



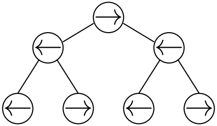


Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques

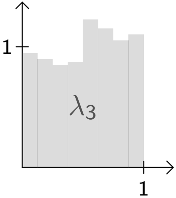
Ingrédients

- La mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$,
- Une famille décroissante $\epsilon_n \downarrow 0$ de limite nulle **mais pas dans** ℓ^1,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$ variables aléatoires i.i.d. dans $\{\leftarrow, \rightarrow\}$.

1$^{\text{ère}}$ étape Construction d'une mesure M sur $[0,1]$.



$$M = \lim_n \lambda_n$$



Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques, suite.

2ème étape : $\phi(s) = M[0,s]$ pour $s \in [0,1]$.

- ϕ n'est pas abs. continue. La dérivée est λ-p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne : $\log|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \log|x-y| + v(\log|x-y|)$, $v(r) \ll r$.

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques, suite.

2$^{\text{ème}}$ étape : $\phi(s) = M[0,s]$ pour $s \in [0,1]$.

- ϕ n'est pas abs. continue. La dérivée est λ-p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne : $\log|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \log|x-y| + v(\log|x-y|)$, $v(r) \ll r$.

3$^{\text{ème}}$ étape : Pour obtenir un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique du tore, $\Phi = \phi_1 \times \phi_2$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont comme précédemment. Φ n'a pas la propriété ACL.

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques, suite.

2ème étape : $\phi(s) = M[0, s]$ pour $s \in [0, 1]$.

- ϕ n'est pas abs. continue. La dérivée est λ-p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne : $\log|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \log|x - y| + v(\log|x - y|)$, $v(r) \ll r$.

3ème étape : Pour obtenir un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique du tore, $\Phi = \phi_1 \times \phi_2$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont comme précédemment. Φ n'a pas la propriété ACL.

Proposition

ϕ and Φ sont sous-linéairement quasisymétriques. La distorsion d'asphéricité à l'échelle s est bornée par $(\sum_{n<-\log_2 s} \epsilon_n)$.

Construction d'homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques, suite.

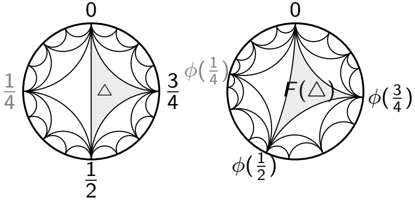
2$^{\text{ème}}$ étape : $\phi(s) = M[0,s]$ pour $s \in [0,1]$.

- ϕ n'est pas abs. continue. La dérivée est λ-p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne : $\log|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \log|x-y| + v(\log|x-y|)$, $v(r) \ll r$.

3$^{\text{ème}}$ étape : Pour obtenir un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique du tore, $\Phi = \phi_1 \times \phi_2$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont comme précédemment. Φ n'a pas la propriété ACL.

Proposition

ϕ and Φ sont sous-linéairement quasisymétriques. La distorsion d'asphéricité à l'échelle s est bornée par $(\sum_{n<-\log_2 s} \epsilon_n)$.



ϕ s'étend-elle en une SBE de $\mathbb{H}^2$?

Dimensions conformes

La **dimension topologique**, la **dimension conforme confidm** sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

Dimensions conformes

La **dimension topologique**, la **dimension conforme confidm** sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

$$\text{dim. conforme} = \sup\left\{ p > 0 : \mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}(\text{courbes non ponctuelles}) = +\infty \right\}$$

$\{\tau_j\}$ sont des paramètres d'asphéricité. $\mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}$ sont des modules grossiers (Pansu). On construit une variante où les asphéricités sont des fonctions sous-linéaires.

Dimensions conformes

La **dimension topologique**, la **dimension conforme confidm** sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

$$\text{dim. conforme} = \sup\left\{p > 0 : \mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}(\text{courbes non ponctuelles}) = +\infty\right\}$$

$\{\tau_j\}$ sont des paramètres d'asphéricité. $\mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}$ sont des modules grossiers (Pansu). On construit une variante où les asphéricités sont des fonctions sous-linéaires. Précisément k, ℓ, m sont des mesures d'asphéricités, et Γ une famille de « courbes »

$$\mathrm{pmod}_{p;k}^{\ell,m}(\Gamma) = \inf\left\{\mathrm{P}\widetilde{\Phi}_{p;k}^{\ell}(N) : \phi \in \mathcal{G}_m(\Gamma)\right\},$$

où $\mathrm{P}\widetilde{\Phi}$ est une mesure d'empilement, et $\mathcal{G}_m(\Gamma)$ désigne une famille de jauges dites admissibles, attribuant une 1-mesure de Carathéodory $\geqslant 1$ à chaque $\gamma \in \Gamma$ (mesuré par recouvrements par des m-quasiboules).

$$\mathrm{scdim}^{\Gamma}_{O(u)}(N, \langle\alpha\rangle) = \sup\Big\{p \in \mathbf{R}_{>0} : \forall k \in O(u),\ \exists \ell \in O(u)$$
$$\forall m \in O(u),\ \mathrm{pmod}_{p;k}^{\ell,m}(\Gamma) = +\infty\Big\}.$$

Dimensions conformes

La **dimension topologique**, la **dimension conforme confidm** sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

$$\text{dim. conforme} = \sup\left\{p > 0 : \mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}(\text{courbes non ponctuelles}) = +\infty\right\}$$

$\{\tau_j\}$ sont des paramètres d'asphéricité. $\mathrm{mod}_p^{\{\tau_j\}}$ sont des modules grossiers (Pansu). On construit une variante où les asphéricités sont des fonctions sous-linéaires. Précisément k, ℓ, m sont des mesures d'asphéricités, et Γ une famille de « courbes »

$$\mathrm{pmod}_{p;k}^{\ell,m}(\Gamma) = \inf\left\{\mathrm{P}\widetilde{\Phi}_{p;k}^{\ell}(N) : \phi \in \mathcal{G}_m(\Gamma)\right\},$$

où $\mathrm{P}\widetilde{\Phi}$ est une mesure d'empilement, et $\mathcal{G}_m(\Gamma)$ désigne une famille de jauges dites admissibles, attribuant une 1-mesure de Carathéodory $\geqslant 1$ à chaque $\gamma \in \Gamma$ (mesuré par recouvrements par des m-quasiboules).

$$\mathrm{scdim}_{O(u)}^{\Gamma}(N, \langle\alpha\rangle) = \sup\Big\{p \in \mathbf{R}_{>0} : \forall k \in O(u),\ \exists \ell \in O(u)$$
$$\forall m \in O(u),\ \mathrm{pmod}_{p;k}^{\ell,m}(\Gamma) = +\infty\Big\}.$$

scdim est invariante par homéomorphisme sous-linéairement

Quelques calculs de dimension conforme

Majorer les modules, permet de minorer les dimensions conformes.

Espace autosimilaire	Dimension sous-linéaire-conforme
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α scalaire.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α unipotente.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec $\alpha = \mathrm{diag}(1, \mu)$	$1 + \mu$
(N, α) N nilpotent α dérivation Heintze	**trace**(α)

Quelques calculs de dimension conforme

Majorer les modules, permet de minorer les dimensions conformes.

Espace autosimilaire	Dimension sous-linéaire-conforme
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α scalaire.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α unipotente.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec $\alpha = \mathrm{diag}(1, \mu)$	$1 + \mu$
(N, α) N nilpotent α dérivation Heintze	$\mathbf{trace}(\alpha)$

Retour sur le théorème I

M	$\dim \partial_\infty M$	scdim $\partial_\infty M$
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{R}}$	n	n
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{C}}$	$2n+1$	$2n+2$
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{H}}$	$4n+3$	$4n+6$
$\mathbb{H}^{2}_{\mathbf{O}}$	15	22

La paire $(\dim \partial_\infty, \mathrm{scdim}\, \partial_\infty)$ classifie les espaces symétriques de rang un, ou les groupes de Heintze non de type focal.

Quelques calculs de dimension conforme

Majorer les modules, permet de minorer les dimensions conformes.

Espace autosimilaire	Dimension sous-linéaire-conforme
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α scalaire.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec α unipotente.	2
$(\mathbf{R}^2, \langle\alpha\rangle)$ avec $\alpha = \mathrm{diag}(1, \mu)$	$1 + \mu$
(N, α) N nilpotent α dérivation Heintze	$\mathbf{trace}(\alpha)$

Retour sur le théorème I

M	$\dim \partial_\infty M$	scdim $\partial_\infty M$
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{R}}$	n	n
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{C}}$	$2n+1$	$2n+2$
$\mathbb{H}^{n+1}_{\mathbf{H}}$	$4n+3$	$4n+6$
$\mathbb{H}^{2}_{\mathbf{O}}$	15	22

La paire $(\dim \partial_\infty, \mathrm{scdim}\, \partial_\infty)$ classifie les espaces symétriques de rang un, ou les groupes de Heintze non de type focal. Dans ce cas, sur $\partial_\infty M$ épointé, une distance CC réalise la dimension conforme, ce qui simplifie la preuve.

Groupes de Heintze métabéliens

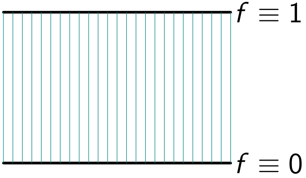
À une borne sur les modules de la famille de courbes correspond une borne sur les énergies (ou variations) de fonctions séparant les armatures d'un condensateur.

Groupes de Heintze métabéliens

À une borne sur les modules de la famille de courbes correspond une borne sur les énergies (ou variations) de fonctions séparant les armatures d'un condensateur.

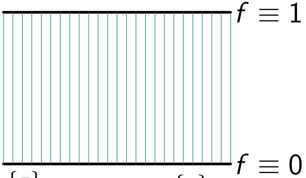
Groupes de Heintze métabéliens

À une borne sur les modules de la famille de courbes correspond une borne sur les énergies (ou variations) de fonctions séparant les armatures d'un condensateur.



Groupes de Heintze métabéliens

À une borne sur les modules de la famille de courbes correspond une borne sur les énergies (ou variations) de fonctions séparant les armatures d'un condensateur.



$$E_p^{\{\tau\}}(f) \geqslant \mathrm{mod}_p^{\{\tau\}}(\Gamma)$$

On définit des algèbres de fonctions $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{p,\{\tau\}}$ (p-variation bornée, et continues) ; si φ est un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique alors $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{p,\{\tau'\}}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{p,\{\tau\}}(\varphi^{-1}\Omega)$ pour Ω ouvert à l'arrivée. $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{p,\{\tau\}}(\Omega)$ est une algèbre de Fréchet.

Théorème de Cornulier (pour les groupes de Heintze)

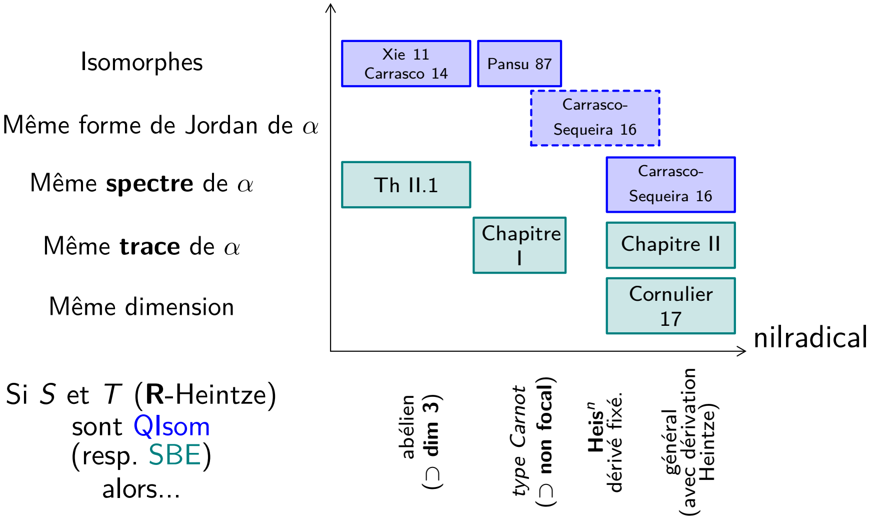
Soit S un groupe de Heintze purement réel, α sa dérivation structurelle. On forme S_∞ avec la même structure mais en ne consevant que la partie semi-simple de α.

Théorème (Cornulier 2008, 2011) généralisant l'observation

S et S_∞ sont $O(\log)$-SBE.

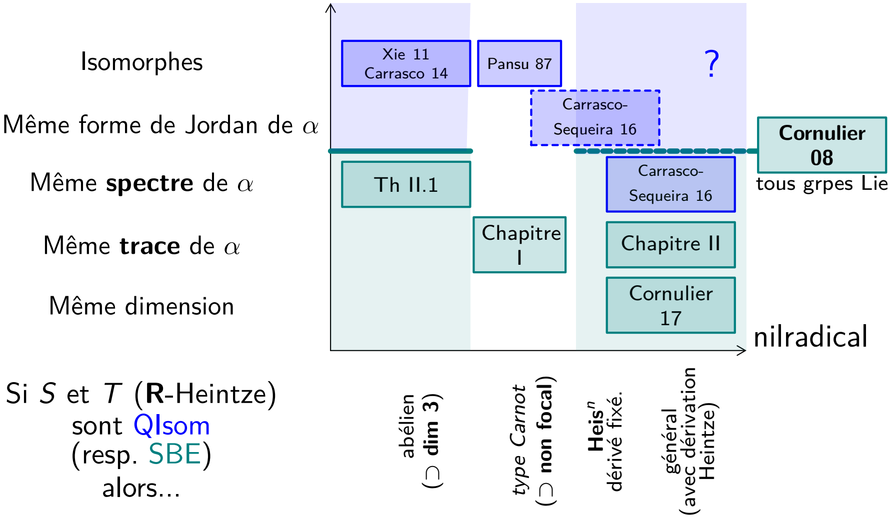
Avec le th. précédent, pour $\{S, T\}$ paire de groupes de Heintze purement réels métabéliens, si S et T sont SBE alors S_∞ et T_∞ sont isomorphes.

Classifications des groupes de Heintze (purement réels)



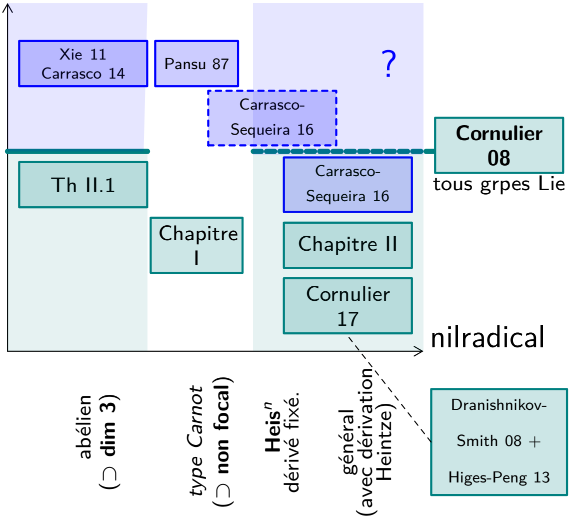
Si S et T ($\mathbf{R}$-Heintze)
sont QIsom
(resp. SBE)
alors...

Classifications des groupes de Heintze (purement réels)



Si S et T ($\mathbf{R}$-Heintze)
sont QIsom
(resp. SBE)
alors...

Classifications des groupes de Heintze (purement réels)



Si S et T (**R**-Heintze)
sont QIsom
(resp. SBE)
alors...

Fonctions de Dehn et groupes nilpotents

Version quantitative de la classification SBE

Rappel (Théorème de Pansu suivant Cornulier)

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, G_∞ le groupe gradué associé. Alors G et G_∞ sont $O(r^\gamma)$-bilipschitziennement équivalents.
Cornulier 2017 : majoration de γ, suivant la structure de Lie(G).

Peut-on minorer γ ? Idée (Cornulier) : utiliser la fonction de Dehn comme témoin.

Théorème (Papasoglu)

Si $d \geqslant 2$ est tel que $\delta_{G_\infty}(n) \preccurlyeq n^d$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta_G(n) \preccurlyeq n^{d+\varepsilon}$.

Cela n'interdit pas le remplissage d'être *meilleur* dans G que dans son cône asymptotique.

Une fonction de Dehn cubique

Théorème (Gromov 93, Allcock 98, Ol'shanskii-Sapir 99)

Soit G le groupe d'Heisenberg $H_5 = H_3 \times_Z H_3$. Alors $\delta_G(n) \preccurlyeq n^2$.

Proposition (travail en cours avec C. Llosa Isenrich et R. Tessera)

Soit G le groupe $L_4 \times_Z H_3$. Alors $\delta_G(n) \preccurlyeq n^3$.

On espère montrer que $L_p \times_Z L_q$ avec $2 < p < q$ a $\delta(n) \preccurlyeq n^{q-1}$.

Corollaire

G et G_∞ ne sont pas $O(r^\gamma)$-SBE avec $\gamma < 1/7$.

G et G_∞ ne sont pas quasiisométriques d'après le théorème de Shalom, car $b_2(G_\infty) = 7$ et $b_2(G) = 6$ (de même $b_3(L_5 \times_Z H_3) = 11$ et $b_3(L_5 \times \mathbf{Z}^2) = 10$).

Quelques questions ouvertes et pistes de recherche

1. A-t-on que si S et T Heintze purement réels sont $o(\log)$-SBE alors ils sont isomorphes ? Pour S et T de dim 3 ?

Quelques questions ouvertes et pistes de recherche

1. A-t-on que si S et T Heintze purement réels sont $o(\log)$-SBE alors ils sont isomorphes ? Pour S et T de dim 3 ?
2. Pour les groupes de type fini non moyennables, QI et biLipschitz définissent la même relation d'équivalence. Y a-t-il une classe de groupes de type fini pour laquelle SBE $\iff$ biLipschitz ? Contient les groupes virtuellement libres.

Quelques questions ouvertes et pistes de recherche

1. A-t-on que si S et T Heintze purement réels sont $o(\log)$-SBE alors ils sont isomorphes ? Pour S et T de dim 3 ?

2. Pour les groupes de type fini non moyennables, QI et biLipschitz définissent la même relation d'équivalence. Y a-t-il une classe de groupes de type fini pour laquelle SBE $\iff$ biLipschitz ? Contient les groupes virtuellement libres.

3. Soit Γ un groupe hyperbolique ou nilpotent de type fini. Est-ce que la percolation de premier passage (FPP) sur un graphe de Cayley de Γ reste SBE à Γ ? avec $\lambda = 1$ si Γ hyperbolique et FPP normalisée ? (pour $\Gamma = \mathbf{Z}$ c'est le TCL). Pour Γ nilpotent, le cône asymptotique de la FPP est une métrique CC d'après Benjamini-Tessera 2014.

Annexes

SBE et équivalences grossières

Autre généralisation de la notion de quasiisométrie. Ces notions se définissent aussi pour les plongements. Monovariants et invariants :

SBE et équivalences grossières

Autre généralisation de la notion de quasiisométrie. Ces notions se définissent aussi pour les plongements. Monovariants et invariants :

1. Dimension asymptotique (Gromov).
2. Croissance si source géodésique et image propre.
3. Profil séparation (Benjamini-Schramm-Timar).

1. Dimension d'Assouad-Nagata asymptotique **pour groupes de Lie** (Dranishnikov-Smith + Higes-Peng)
2. Dimension (top.) des cônes asymptotiques (Cornulier).

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes.

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|^{1/i}$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i / \mathfrak{g}^{i+1}$.

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|^{1/i}$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Théorème (Guivarc'h 1973)

Si d est une distance invariante à gauche pour $\circ$ ou $\star$, propre et géodésique, alors il existe $c \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{c}|x| \leqslant d(0, x) \leqslant c|x|$.

Dilatations asymptotiques des groupes nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ un isomorphisme linéaire respectant les filtrations centrales descendantes. Sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ il y a :

- Deux structures d'algèbre de Lie : le crochet gradué $[x, y]_{\mathrm{gr}}$, et $\{x, y\} = L\left[L^{-1}x, L^{-1}y\right]$.
- Deux structures de groupe de Lie (via la série de Campbell-Hausdorff) : $(x, y) \mapsto x \bullet y$ et $(x, y) \mapsto x \star y$. Remarque : $(-x) \circ x = (-x) \star x = 0$.
- Une norme, dite homogène : $|x| = \sup_i |x_i|^{1/i}$ si $x = \sum x_i$, $x_i \in \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}$.

Théorème (Guivarc'h 1973)

Si d est une distance invariante à gauche pour $\circ$ ou $\star$, propre et géodésique, alors il existe $c \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{c}|x| \leqslant d(0, x) \leqslant c|x|$.

Théorème (Goodman 1977 - Cornulier 2011, 2016 γ explicite)

Il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que $|x \circ y - x \star y| = O\left((|x| \vee |y|)^{\gamma}\right)$.

SBE des groupes nilpotents

La proximité à grande échelle des structures d'algèbre de Lie entraîne une proximité des structures métriques des groupes correspondants :

SBE des groupes nilpotents

La proximité à grande échelle des structures d'algèbre de Lie entraîne une proximité des structures métriques des groupes correspondants :

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors id : $(\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.
Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$d_\circ(x, y) = d(0, -x \circ y) \qquad \text{(inv. à gauche)}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.
Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\ &\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors id : $(\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.
Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$
\begin{aligned}
d_\circ(x, y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\
&\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\
&\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)}
\end{aligned}
$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.
Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\ &\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\ &\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\ &\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)} \end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathrm{id} : (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.

Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\ &\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\ &\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\ &\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)} \\ &\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(d_\star(0,x)^\gamma \vee d_\star(0,y)^\gamma), \end{aligned}$$

SBE des groupes nilpotents

Théorème (Cornulier)

Soient $d_\circ$ et $d_\star$ deux distances $\circ$ et $\star$-invariantes, propres et géodésques sur $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Alors id : $(\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \circ) \to (\mathrm{gr}(\mathfrak{g}), \star)$ est $O(r^\gamma)$-SBE, avec γ explicite.

Ceci implique une variante du th. de Pansu en prenant pour $d_\star$ une distance CC.
Pour tous $x, y \in \mathrm{gr}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_\circ(x,y) &= d(0, -x \circ y) && \text{(inv. à gauche)} \\ &\leqslant c|-x \circ y| && \text{(Guivarc'h)} \\ &\leqslant c|-x \star y| + c|(-x \star y) - (-x \circ y)| && \text{(inég. } \triangle\text{)} \\ &\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma) && \text{(Guivarc'h + Goodman)} \\ &\leqslant c^2 d_\star(x,y) + O(d_\star(0,x)^\gamma \vee d_\star(0,y)^\gamma), \end{aligned}$$

et de même $d_\star(x,y) \leqslant c^2 d_\circ(x,y) + O(|x|^\gamma \vee |x|^\gamma)$.

S_1 et S' sont sous-linéairement bilipschitz-équivalents

Observation (Cornulier)

S_1 et S' sont SBE.

S_1 et S' sont sous-linéairement bilipschitz-équivalents

Observation (Cornulier)

S_1 et S' sont SBE.

Plongeons S_1 et S' dans $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$, soit $\psi : G_1 \to G_2$

$$g = \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\psi} \begin{pmatrix} e^t & te^t & x \\ 0 & e^t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sur S_1 et S', il existe d_1 (resp. d_2) invariantes à gauche avec $\exists K_1, K' > 0$

$$|t| + K_1^{-1} \log^+ \|(x,y)\| \leqslant d_1(e,(x,y,t)) \leqslant |t| + K_1 \log^+ \|(x,y)\|.$$

$$|t| + K'^{-1} \log^+ \|(x,y)\| \leqslant d'(e,(x,y,t)) \leqslant |t| + K' \log^+ \|(x,y)\|.$$

S_1 et S' sont SBE - suite

Soient g, h dans S_1. Calculons $d'(\psi(g)^{-1}\psi(h))$:

$$\psi(g)^{-1}\psi(g') = \begin{pmatrix} e^{-t_g} & -te^{-t_g} & -xe^{-t_g} + tye^{-t_g} \\ 0 & e^{-t_g} & -e^{-t_g}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_h} & t_h e^{t_h} & x_h \\ 0 & e^{t_h} & y_h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t_h - t_g} & (t_h - t_g)e^{t_h - t_g} & e^{-t_g}(x_h - x_g) - t_g e^{-t_g}(y_h - y_g) \\ 0 & e^{t_h - t_g} & e^{-t_g}(y_h - y_g) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_1 et S' sont SBE - suite

Soient g, h dans S_1. Calculons $d'(\psi(g)^{-1}\psi(h))$:

$$\psi(g)^{-1}\psi(g') = \begin{pmatrix} e^{-t_g} & -te^{-t_g} & -xe^{-t_g} + tye^{-t_g} \\ 0 & e^{-t_g} & -e^{-t_g}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_h} & t_h e^{t_h} & x_h \\ 0 & e^{t_h} & y_h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t_h - t_g} & (t_h - t_g)e^{t_h - t_g} & e^{-t_g}(x_h - x_g) - t_g e^{-t_g}(y_h - y_g) \\ 0 & e^{t_h - t_g} & e^{-t_g}(y_h - y_g) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $d'(\psi(g), \psi(h) \leqslant d_1(g,h) + C\log^+(|g| \vee |h|)$ pour un certain $C > 0$. De même $d'(\psi(g), \psi(h) \geqslant d_1(g,h) - C\log^+(|g| \vee |h|)$.