Deux thèmes de combinatoire

Gabriel Pallier

Parimaths – 6 février 2016, séance reprise le 7 décembre 2017

1. Partitions d'un entier

D'après Bernard Randé, *Les partitions à la portée de tous*, Séminaire IREM Paris Diderot, 13 janvier 2016. Une référence pour cette section est le livre de Hardy et Wright, [1].

1.1. Les partitions et leurs diagrammes

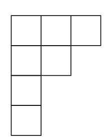
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Une partition de n est une décomposition de n en somme d'entiers naturels non nuls appelés parts. Par exemple, $7 = 3+2+1+1$ est une partition de 7 en quatre parts. On va s'intéresser ici au nombre de partitions de l'entier n que l'on note $p(n)$. Ainsi par exemple, $p(4) = 5$, puisque

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

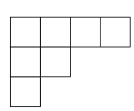
Exercice 1. Calculer $p(n)$ pour n allant de 1 à 5.

Exercice 2. Montrer qu'il y a exactement autant de partitions de 2017 en parts qui sont toutes $\leqslant 561$ que de partitions de 2017 en au plus 561 parts (561 ne joue pas de rôle particulier ici, mais c'est quand même un entier assez spécial, savez-vous pourquoi ?).

Pour résoudre l'exercice précedent, et aller au-delà, il est commode de représenter une partition par un tableau que nous appellerons diagramme de Ferrers (d'autres diraient tableau de Young). Dans ce tableau on place sur chaque ligne le nombre de cases correspondant à une part, par ordre décroissant. Ainsi, la partition $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ est représentée par :



Compter les partitions de n, c'est donc encore compter les diagrammes de Ferrers à n cases. Quand on se donne un diagramme de Ferrers, il est possible (et c'est même assez tentant !) de le transformer en échangeant lignes et colonnes ; le nouveau diagramme décrit une partition dite duale de la première. Pour l'exemple précédent la partition duale est $7 = 4 + 2 + 1$ et son diagramme est



Enfin, une partition dont le diagramme de Ferrers est symétrique, est dite auto-duale.

Exercice 3. Montrer que $p(11)$ est pair, puis que $p(13)$ est impair (Indication : on pourra commencer par compter les partitions auto-duales).

1.2. Comment $p(n)$ grandit-il ?

Calculer $p(n)$ à la main ne paraît pas facile, et ce d'autant plus que n devient grand. Afin de progresser un peu dans cette direction, établissons une formule de récurrence (que nous pourrions ensuite donner à un ordinateur).

Exercice 4. Notons $p(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parts. Montrer que

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k). \tag{1.1}$$

(Indication : on pourra partitionner [1] les partitions en deux parties : celles dont la plus petite part est 1, et les autres).

De l'exercice précédent nous déduisons les premières valeurs de $p(n,k)$ puis de $p(n)$ (toutes celles permettant de calculer $p(13,5) = 18$ sont en bleu) :

							k							
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$p(n)$
1	**1**													1
2	**1**	**1**												2
3	**1**	**1**	**1**											3
4	**1**	2	1	**1**										5
5	**1**	**2**	2	1	1									7
6	**1**	**3**	**3**	2	1	1								11
7	**1**	**3**	**4**	**3**	2	1	1							15
8	**1**	**4**	**5**	**5**	**3**	2	1	1						22
9	**1**	4	7	6	5	3	2	1	1					29
10	1	**5**	8	9	7	5	3	2	1	1				42
11	1	5	**10**	11	10	7	5	3	2	1	1			56
12	1	6	12	**15**	13	11	7	5	3	2	1	1		77
13	1	6	14	18	**18**	14	11	7	5	3	2	1	1	101

En observant la colonne de droite, on constate que $p(n)$ grandit, semble-t-il de plus en plus vite. Afin de la comparer à une croissance exponentielle, dressons un tableau des quotients successifs arrondis à 10^{-2} près :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(n+1)/p(n)$	2	1.50	1.67	1.40	1.57	1.36	1.46	1.32	1.45	1.33	1.38	1.31

Il apparaît que la suite des quotients diminue globalement [2]. On pourrait pousser plus loin à l'aide d'une machine et constater que $p(n+1)/p(n)$ s'approche de 1 quand n tend vers $+\infty$,

1. On parle ici de partition d'un ensemble, à ne pas confondre avec les partitions d'un entier. Les partitions d'un ensemble sont comptées pas les nombres de Bell, qui sont des sommes de nombres de Stirling. Un *must* sur le sujet (en anglais) : [5, chapitre 6].

2. Il semble y avoir aussi une oscillation de croissance assez sensible entre terme pairs et impairs. Je ne sais pas l'expliquer, et vous ?

ce qui est caractéristique d'une croissance sous-exponentielle. Mais bien sûr, ceci n'est pas une démonstration. Voici quelques exercices qui vont dans ce sens.

Exercice 5 (Une majoration). Montrer que pour tous n, k entiers naturels on a $p(n,k) \leqslant \binom{n}{k}$ (Indication : on pourra, une k-partition $n = a_1 + \cdots + a_k$ étant donnée, considérer la suite des sommes partielles a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$... associées à cette partition). Puis en déduire que

$$p(n) \leqslant 2^n. \tag{1.2}$$

Exercice 6 (A faire plus tard). En améliorant le raisonnement qui précède, montrer que si $q(n)$ est le nombre de partitions dont les parts sont toutes distinctes, alors quel que soit $\epsilon > 0$, pour n assez grand

$$q(n) \leqslant (1+\epsilon)^n. \tag{1.3}$$

Nous verrons plus loin comment rapprocher $q(n)$ et $p(n)$. D'un autre côté, on pourrait montrer (ce n'est pas très difficile, mais pas très intéressant non plus) que $q(n)$ – et donc a fortiori $p(n)$ qui est plus grand – devient supérieur à n^d, ceci quel que soit d, au bout d'un certain temps, temps qui dépend bien sûr du d choisi. La croissance de $p(n)$ est donc d'un type *intermédiaire* entre les fonctions polynômiales et l'exponentielle. En fait, les mathématiciens Hardy et Ramanujan ont démontré une magnifique approximation de $p(n)$, qu'on pourra contempler avant de passer à la section suivante :

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Hardy et Ramanujan ont aussi précisé le sens du $\approx$ dans la formule. Ici on peut l'exprimer simplement en disant que le quotient des deux membres tend vers 1. Le résultat est un peu plus précis.

1.3. Parts impaires et parts distinctes : un théorème, trois preuves

On se propose ici de visiter le théorème suivant :

Théorème 1. *Le nombre $q(n)$ de partitions de l'entier n en parts distinctes est égal au nombre de $p_1(n)$ partitions de n en parts impaires.*

Nous proposons plusieurs preuves du théorème sous forme d'exercices. Les deux derniers demandent d'avoir déjà rencontré [3] les séries génératrices.

Exercice 7. On rappelle que tout nombre entier $\ell \geqslant 1$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\ell = 2^a + 2^b + 2^c + \cdots$$

où $0 \leqslant a < b < c \ldots$ Etant donnée une partition de l'entier n en parts impaires, et en utilisant la décomposition précédente, construire une partition de n en parts distinctes. Conclure.

3. On ne vous demandera pas où, mais le texte de la séance de Margaret Bilu à Parimaths est un bon endroit pour commencer. A minima, on « rappelle » que si (u_n) est une suite réelle, ceci désigne la série dite formelle

$$U(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots$$

Exercice 8. * Soit $Q(x)$ (resp. $P_1(x)$) la série génératrice de la suite $(q(n))$ (resp. de $(p_1(n))$). Vérifier que :

$$Q(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$
$$P_1(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$$

En utilisant l'identité remarquable $1+x^i = \frac{1-x^{2i}}{1-x^i}$, montrer que $Q = P_1$; retrouver le théorème 1.

Exercice 9. * Montrer l'identité de séries génératrices

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots = \frac{1}{1-x}$$

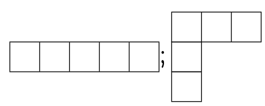
En déduire le théorème 1. A la dégustation, cette troisième preuve a-t-elle un goût plus proche de la première ou de la seconde ?

Dans la même veine, signalons aussi un joli résultat d'Euler :

Théorème 2. *Le nombre de partitions de l'entier n en parts* impaires et distinctes *est égal au nombre partitions de n auto-duales.*

Il est plaisant de rechercher plusieurs preuves, faisant intervenir en plus ou moins grande dose les diagrammes de Ferrers, des ingrédients combinatoires et de séries génératrices. On pourra consulter [1] à ce sujet.

Exercice 10. Démontrer le théorème 2 d'Euler à l'aide des diagrammes de Ferrer. Indication : observer le dessin suivant.



1.4. *Vers le théorème des nombres pentagonaux*

Exercice 11. Pour tout $j \geqslant 1$, on pose $\pi(j) = \frac{3j^2-j}{2}$. Pourquoi ces nombres sont-ils appelés "nombres pentagonaux" ?

Exercice 12. On admet le théorème suivant, dû à Euler (consulter [2] chapitre 31 pour une preuve) :

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots = \sum_j (-1)^{j-1} p(n - \pi_\pm(j)) \tag{1.4}$$

où $\pi_\pm(j)$ sont les nombres pentagonaux généralisés $\frac{3j^2 \pm j}{2}$. Pour calculer $p(n)$ pour n allant de 1 à N, quelle est la formule la plus efficace entre (1.1) et (1.4) ? Comparer le nombre d'additions nécessaires dans les deux cas.

2. Nombres de Catalan

La suite des nombres de Catalan

$$1, 2, 5, 14, 42, \ldots$$

est sans doute l'une de celles tapées les plus fréquemment sur le moteur de recherche des suites d'entiers [6]. Il y a pour ceci pour deux raisons : d'une part elle est légèrement moins célèbre que les suites "standard" qui se manifestent en combinatoire (nombre de permutations, binomiaux, suite de Fibonacci...) et d'autre part, il est possible de la redécouvrir par de très nombreux chemins.

2.1. Le coefficient binomial central (CBC)

Les nombres de Catalan sont liés aux coefficients binomiaux centraux $\binom{2n}{n}$. Voici quelques exercices pour les voir à l'action :

Exercice 13. Pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{2n}{n}$ est un entier pair. Trouver le plus de preuves possibles !

Exercice 14. [3] Un policier et un voleur partent chacun d'un coin opposé sur un goban [4] $n \times n$. Le policier part du Sud-Ouest, et se déplace à chaque seconde soit vers le Nord, soit vers l'Est avec probabilité $1/2$; Le voleur part du Nord-Est, et se déplace à chaque seconde soit vers le Sud, soit vers l'Ouest avec probabilité $1/2$. Montrer que la probabilité que le policier attrape le voleur est

$$p_n = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

Exercice 15. Soit p un nombre premier. Montrer que la plus grande puissance de p qui divise $\binom{2n}{n}$ est plus petite [5] que $2n$.

Exercice 16. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\binom{2p}{p} \equiv 2 \mod 2p$

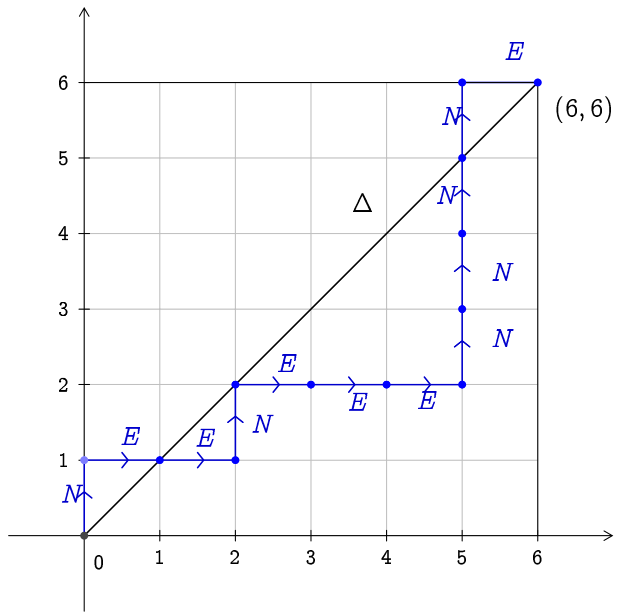
2.2. Nombres d'excursions et nombres de Catalan

Exercice 17 (Principe de réflexion - Désiré André, 1887 [4]). Soit C un goban $n \times n$, parcouru par une rivière Δ qui va du Sud-Ouest au Nord-Est. On se donne un point de départ d sur le côté ouest, un point d'arrivée a sur le côté Nord. Montrer que le nombre d'excursions (suite de pas vers l'Est et le Nord) joignant d à a en arrivant mouillé (i.e. en ayant *touché* Δ au moins une fois) est égal au nombre d'excursions vers le Nord et l'Est de d' à a, où d' est le symétrique de d par rapport à Δ. En déduire que le nombre de chemins du coin SO au coin NE qui passent *strictement en-dessous* de Δ au moins une fois, est $\binom{2n}{n+1}$.

Il suit de l'exercice précédent que le nombre de chemins du coin SO au coin NE en restant (au sens large) au-dessus de Δ est :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2.1}$$

4. l'échiquier du go
5. Pour une application de ce lemme à la preuve d'Erdös du postulat de Bertrand, consulter [2] chapitre 2



Exercice 18. A l'élection présidentielle, deux candidats arrivent ex-aequo. Quelle est la probabilité que tout au cours du dépouillement, l'un d'entre eux ait toujours eu au moins autant de voix que son adversaire ?

Exercice 19. Même exercice que 14, mais cette fois le voleur et le policier ne peuvent pas traverser la rivière Δ.

2.3. De l'ubiquité des nombres de Catalan

Exercice 20 (La relation fonctionnelle). * A partir de la caractérisation combinatoire de la partie précédente, montrer que la suite des nombres de Catalan satisfait la relation de récurrence suivante : $C_1 = 1$ et

$$C_{n+1} = \sum_k C_k C_{n-k} \tag{2.2}$$

Montrer que la série génératrice $C(x)$ est solution d'une équation algébrique que l'on déterminera. Retrouver ainsi la forme dite "fermée" (2.1).

Exercice 21. [3] On dispose d'un quantité non limitée de rondeaux de bois (cylindre pleins de même taille) que l'on souhaite empiler, selon les règles suivantes :

— La rangée du bas comporte n rondeaux adjacentes

— Tout nouveau rondeau ajouté doit l'être sur deux rondeaux de la rangée inférieure

Combien y a-t-il de manière de faire ?

Exercice 22. [3, 4] $2n$ personnes sont assises autour d'une table ronde. De combien de manières différentes peuvent-elle se serrer la main sans que deux poignées de main ne se croisent ?

Exercice 23. Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier convexe à n-côté. Trianguler $\mathcal{P}$, c'est le disséquer en triangles dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$. Combien y a-t-il de manières de trianguler $\mathcal{P}$?

Les trois derniers exercices relèvent du même principe : la relation de récurrence de Catalan (2.2) est quelque chose qui apparaît relativement naturellement quand on compte certains types d'objets. A partir de là, si le premier terme de la suite est 1, ces objets sont énumérés par les nombres de Catalan. On trouvera de nombreux autres exemples dans [3]. La structure mathématique commune est celle d'*arbre binaire* ou (ce qui est strictement équivalent) d'*expression bien parenthésée.* En informatique, l'étude combinatoire de ces structures dites récursives est de très grande importance pour évaluer le temps d'éxecution de certains types d'algorithmes.

Références

[1] G.H. Hardy, E.M. Wright, *Introduction à la théorie des nombres,* Vuibert, 2006.

[2] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proof from the Book,* Springer (4e edition, 2008)

[3] T. Koshy, *Catalan Numbers with applications,* Oxford University Press, 2008.

[4] A. Engel, *Solutions d'expert,* Cassini (trad. J.C. Novelli), 2010.

[5] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics : a foundation for computer science*, Addison-Wesley, 2nd edition, 2006.

[6] N.J.A Sloane, *The Online Encyclopaedia of Integer Sequences*
`https://oeis.org/`