

# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE DES GROUPES DE LIE DE COURBURE STRICTEMENT NÉGATIVE

---

**Gabriel Pallier** - Université Paris-Sud, Orsay

14 juin 2019

Séminaire Teich – Marseille

# PLAN DE L'EXPOSÉ

Groupes de Heintze

Géométrie à grande échelle

Bord à l'infini des groupes de Heintze

Invariants pour les groupes de Heintze

## GROUPES DE HEINTZE

---

Extrait d'un théorème (Heintze 1974) (Wolf 1964)

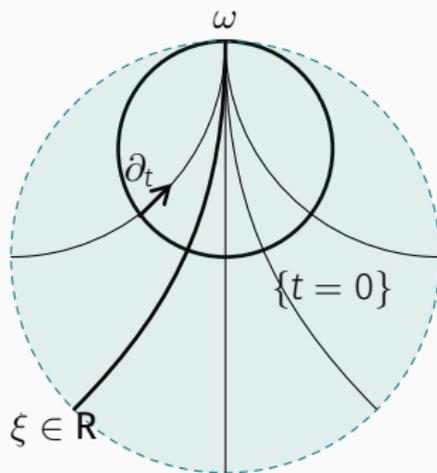
Soit  $Y$  une variété riemannienne simplement connexe homogène de courbure  $< 0$ .  $Y$  est une métrique invariante sur  $S$  résoluble.

## Extrait d'un théorème (Heintze 1974) (Wolf 1964)

Soit  $Y$  une variété riemannienne simplement connexe homogène de courbure  $< 0$ .  $Y$  est une métrique invariante sur  $S$  résoluble.

**Exemple :** Si  $\dim Y = 2$  alors  $Y$  homothétique à  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  ( $K$  est constante). En coordonnées horosphériques  
 $ds^2 = dt^2 + e^{-2t}dx^2$ .

$S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (avec  $t.x = e^t x$ ) est un minimal parabolique de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ , il fixe  $\omega \in \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

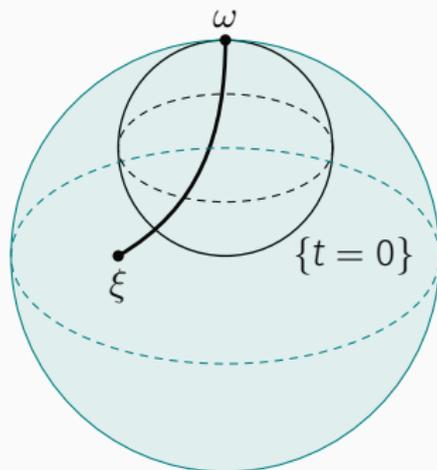


# GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (1)

Soit  $S$  un groupe opérant simplement transitivement sur  $H_{\mathbb{R}}^3$ .

# GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (1)

Soit  $S$  un groupe opérant simplement transitivement sur  $H_{\mathbf{R}}^3$ . On montre qu'un tel  $S$  fixe exactement un point à l'infini,  $\omega$ , le cocycle détermine  $S/[S, S] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$  et  $S$  permute les horosphères centrées en  $\omega$ .



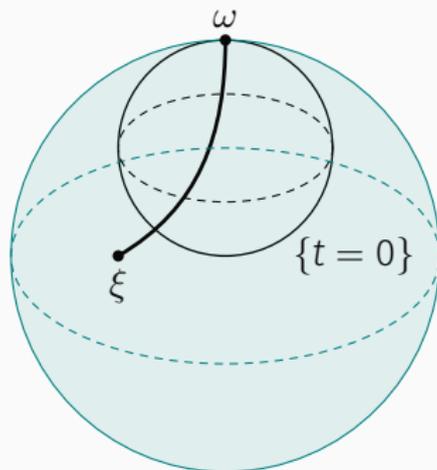
# GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (1)

Soit  $S$  un groupe opérant simplement transitivement sur  $H_{\mathbf{R}}^3$ . On montre qu'un tel  $S$  fixe exactement un point à l'infini,  $\omega$ , le cocycle détermine  $S/[S, S] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$  et  $S$  permute les horosphères centrées en  $\omega$ .

$S = \mathbf{R} \ltimes \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}$  agit par dilatations, engendrées par

$$\alpha \sim \begin{pmatrix} 1 + i\tau & 0 \\ 0 & 1 - i\tau \end{pmatrix}, \tau \in \mathbf{R}.$$

Mod. conjugaison et normalisation,  $\alpha$  détermine  $S$ .



# GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (1)

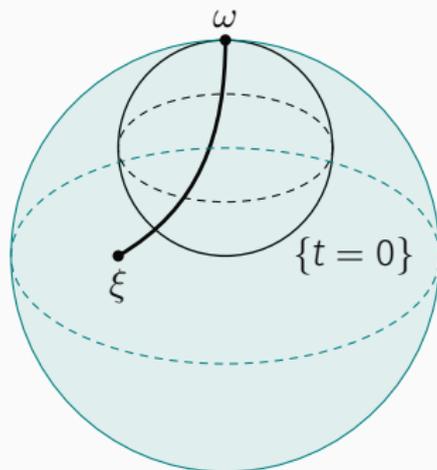
Soit  $S$  un groupe opérant simplement transitivement sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ . On montre qu'un tel  $S$  fixe exactement un point à l'infini,  $\omega$ , le cocycle détermine  $S/[S, S] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  et  $S$  permute les horosphères centrées en  $\omega$ .

$S = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}$  agit par dilatations, engendrées par

$$\alpha \sim \begin{pmatrix} 1 + i\tau & 0 \\ 0 & 1 - i\tau \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}.$$

Mod. conjugaison et normalisation,  $\alpha$  détermine  $S$ .

**⚠** infinité de groupes isométriques (à  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ ) non isomorphes. Mais un unique purement réel ( $\tau = 0$ ).



## GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (2)

Les groupes de Heintze de dimension 3 sont des  $\mathbf{R} \times_{\alpha} \mathbf{R}^2$  classifiés par  $\alpha$  dilatante ( $\Re(\text{valeurs propres}(\alpha)) > 0$ ), mod. conjugaison et normalisation.

## GROUPES DE HEINTZE DE DIMENSION TROIS (2)

Les groupes de Heintze de dimension 3 sont des  $\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} \mathbf{R}^2$  classifiés par  $\alpha$  dilatante ( $\Re(\text{valeurs propres}(\alpha)) > 0$ ), mod. conjugaison et normalisation.

- $\alpha$  est **diagonale** : soit  $\mu \geq 1$ , on forme  $S_{\mu} = \mathbf{R} \rtimes \mathbf{R}^2$  avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp \left[ t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $\alpha$  est **unipotente** : on forme  $S' = \mathbf{R} \rtimes \mathbf{R}^2$  avec

$$t.(x_1, x_2) = \exp \left[ t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(Bianchi 1898 :  $S_{\mu}$  avec  $\mu \neq 1$  et  $S'$  ont chacune une famille à 1 param. de métriques invariantes à homothétie près) Pour  $S'$ , pincement arbitrairement proche de 1.

# GROUPES DE HEINTZE ET ESPACES SYMÉTRIQUES

$Y = G/K$  espace symétrique de courbure sect.  $< 0$ ,  $G = KAN$ .  $S = AN$   
groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur  $Y$ .

# GROUPES DE HEINTZE ET ESPACES SYMÉTRIQUES

$Y = G/K$  espace symétrique de courbure sect.  $< 0$ ,  $G = KAN$ .  $S = AN$   
groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur  $Y$ .

# GROUPES DE HEINTZE ET ESPACES SYMÉTRIQUES

$Y = G/K$  espace symétrique de courbure sect.  $< 0$ ,  $G = KAN$ .  $S = AN$  groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur  $Y$ .

**Exemples :**

$$A = \mathbf{R}^1, N = \mathbf{R}^n, Y = \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}.$$

$$A = \mathbf{R}^1, N = \text{Heisenberg}^{2n+1},$$

$$Y = \mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}.$$

# GROUPES DE HEINTZE ET ESPACES SYMÉTRIQUES

$Y = G/K$  espace symétrique de courbure sect.  $< 0$ ,  $G = KAN$ .  $S = AN$  groupe de Heintze, agit simplement transitivement sur  $Y$ .

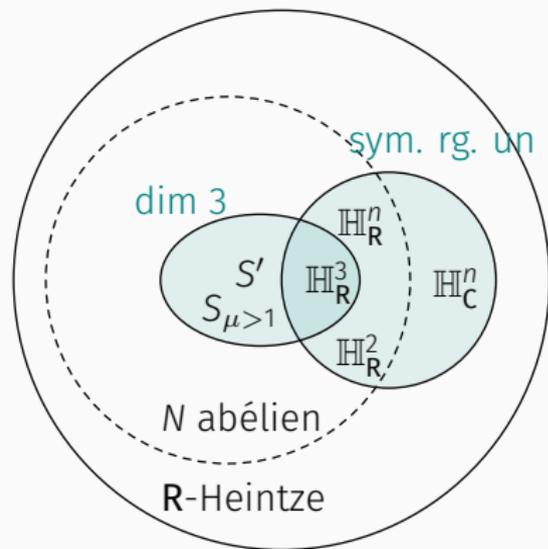
Exemples :

$$A = \mathbf{R}^1, N = \mathbf{R}^n, Y = \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}.$$

$$A = \mathbf{R}^1, N = \text{Heisenberg}^{2n+1},$$

$$Y = \mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}.$$

En général un groupe de Heintze a la forme  $\mathbf{R} \ltimes N$  où  $N$  est nilpotent et l'action dilatante. Ceux qui n'ont pas de métriques symétrique sont dits focaux.



# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE

---

# QUASIISOMÉTRIES ET ÉQUIVALENCES SOUS-LINÉAIRES

$Y, Y'$  sont des espaces métriques pointés  $\lambda \geq 1$ .

- $f: Y \rightarrow Y'$  est une **quasiisométrie** (QI) si  $\exists c \geq 0$  s.t.  $\forall y_1, y_2 \in Y,$   
 $\forall y' \in Y',$

$$\begin{cases} \lambda^{-1}d(y_1, y_2) - c \leq d(f(y_1), f(y_2)) \leq \lambda d(y_1, y_2) + c \\ d(y', f(Y)) \leq c. \end{cases}$$

# QUASIIISOMÉTRIES ET ÉQUIVALENCES SOUS-LINÉAIRES

$Y, Y'$  sont des espaces métriques pointés  $\lambda \geq 1$ .

- $f: Y \rightarrow Y'$  est une **quasiisométrie** (QI) si  $\exists c \geq 0$  s.t.  $\forall y_1, y_2 \in Y$ ,  
 $\forall y' \in Y'$ ,

$$\begin{cases} \lambda^{-1}d(y_1, y_2) - c \leq d(f(y_1), f(y_2)) \leq \lambda d(y_1, y_2) + c \\ d(y', f(Y)) \leq c. \end{cases}$$

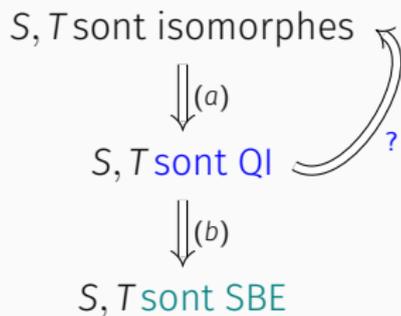
- $f: Y \rightarrow Y'$  est une **équivalence bilipschitzienne sous-linéaire** (SBE) s'il existe  $v: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 1}$  sous linéaire tq  $\forall y_1, y_2 \in Y$  and  $\forall y' \in Y'$ ,

$$\begin{cases} \lambda^{-1}d(y_1, y_2) - v(|y_1| + |y_2|) \leq d(f(y_1), f(y_2)) \\ \leq \lambda d(y_1, y_2) + v(|y_1| + |y_2|) \\ d(y', f(Y)) \leq v(|y'|), \end{cases}$$

où  $|\cdot|$  est la distance au point base. (D'après Y. Cornulier).

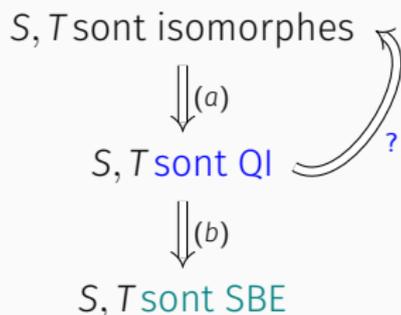
# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE DES GROUPES DE HEINTZE

Soit  $\{S, T\}$  une paire de groupes de Heintze **purement réels**.



# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE DES GROUPES DE HEINTZE

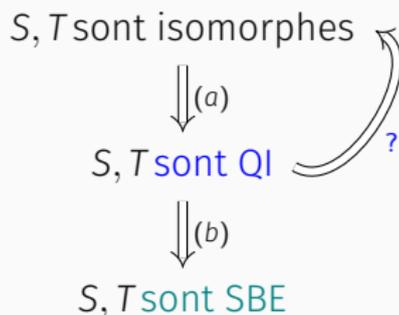
Soit  $\{S, T\}$  une paire de groupes de Heintze **purement réels**.



- La réciproque de (a) est ouverte, connue si de plus  $S$  a une métrique symétrique ou est de dim 3 (Mostow, Xie).

# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE DES GROUPES DE HEINTZE

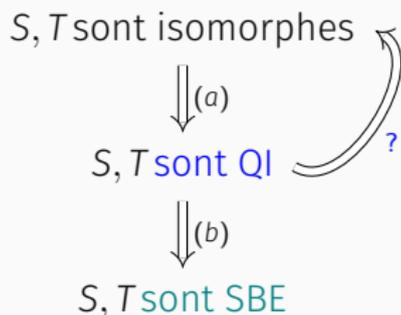
Soit  $\{S, T\}$  une paire de groupes de Heintze **purement réels**.



- La réciproque de (a) est ouverte, connue si de plus  $S$  a une métrique symétrique ou est de dim 3 (Mostow, Xie).
- Pas de réciproque de (b):  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$  sont  $O(\log)$ -SBE (Cornulier).

# GÉOMÉTRIE À GRANDE ÉCHELLE DES GROUPES DE HEINTZE

Soit  $\{S, T\}$  une paire de groupes de Heintze **purement réels**.



- La réciproque de (a) est ouverte, connue si de plus  $S$  a une métrique symétrique ou est de dim 3 (Mostow, Xie).
- Pas de réciproque de (b):  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$  sont  $O(\log)$ -SBE (Cornulier).

## Théorème I (P. 2018)

Soient  $n, m \geq 2$ ,  
 $\mathbf{K}, \mathbf{L} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}\}$ . Si  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^n$  et  $\mathbb{H}_{\mathbf{L}}^m$   
sont SBE alors  $n = m, \mathbf{K} = \mathbf{L}$ .

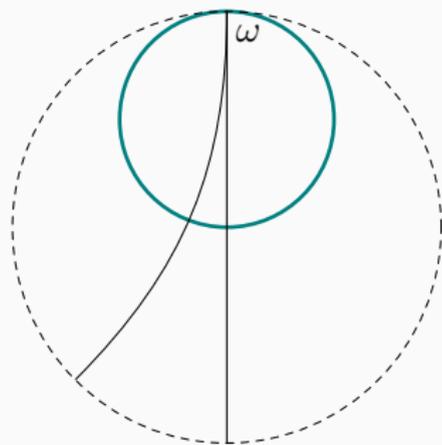
## Théorème II (P. 2019)

Soient  $\mu_1, \mu_2 \geq 1$ . Si  $S_{\mu_1}$  et  $S_{\mu_2}$   
sont SBE alors  $\mu_1 = \mu_2$ .

# BORD À L'INFINI DES GROUPES DE HEINTZE

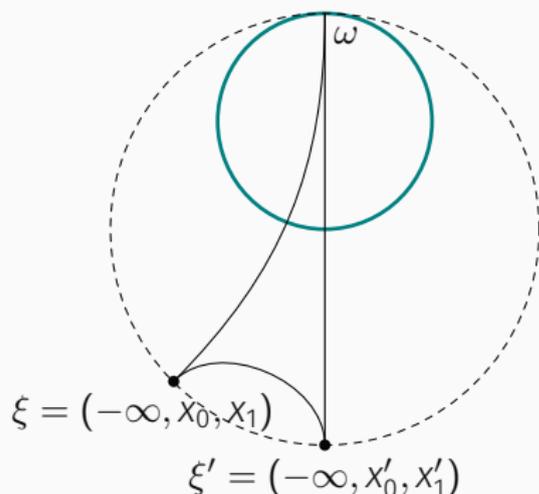
---

Les horosphères centrées en  $\omega$   
sont des classes de  $N = [S, S]$



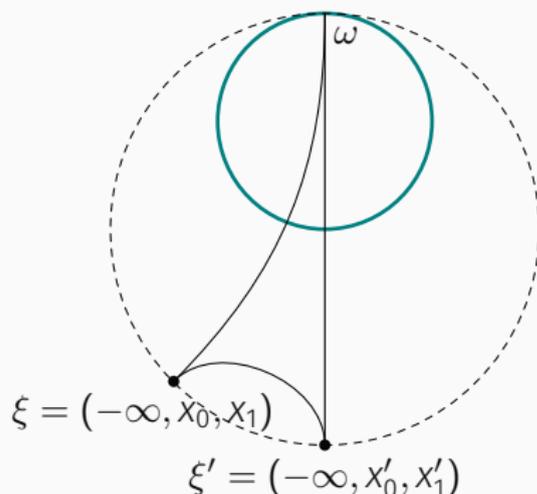
# BORD D'UN GROUPE DE HEINTZE

Les horosphères centrées en  $\omega$  sont des classes de  $N = [S, S]$ . Le bord privé de  $\omega$  est noté  $\partial_{\infty}^* S$ . Les géodésiques finissant en  $\omega$  sont de la forme  $\{(t, x, y)\}_{t \in \mathbb{R}}$ .



# BORD D'UN GROUPE DE HEINTZE

Les horosphères centrées en  $\omega$  sont des classes de  $N = [S, S]$ . Le bord privé de  $\omega$  est noté  $\partial_{\infty}^* S$ . Les géodésiques finissant en  $\omega$  sont de la forme  $\{(t, x, y)\}_{t \in \mathbb{R}}$ . On identifie  $\partial_{\infty}^* Y$  et  $N$ .

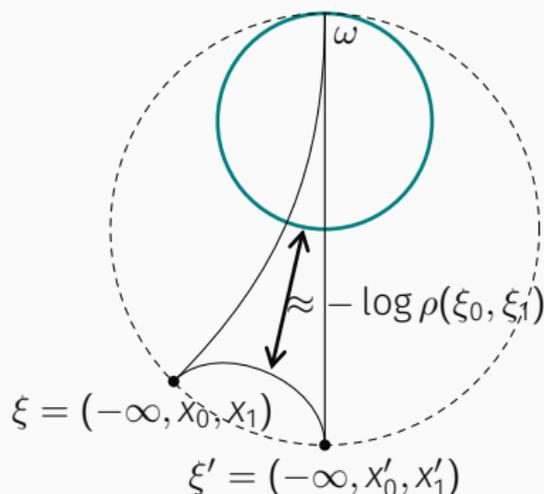


Le noyau d'Euclide-Cygan (Paulin, Herschsky)

$$\rho(\xi, \xi') := \exp\left(-\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} d_Y((-t, x_0, x_1), (-t, (x'_0, x'_1)) + 2t)\right).$$

# BORD D'UN GROUPE DE HEINTZE

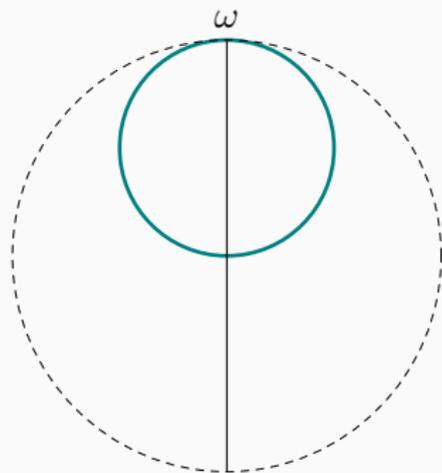
Les horosphères centrées en  $\omega$  sont des classes de  $N = [S, S]$ . Le bord privé de  $\omega$  est noté  $\partial_\infty^* S$ . Les géodésiques finissant en  $\omega$  sont de la forme  $\{(t, x, y)\}_{t \in \mathbb{R}}$ . On identifie  $\partial_\infty^* Y$  et  $N$ .



Le noyau d'Euclide-Cygan (Paulin, Herschsky)

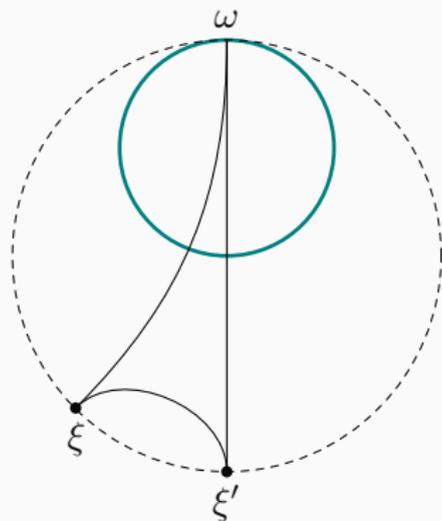
$$\rho(\xi, \xi') := \exp\left(-\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} d_Y((-t, x_0, x_1), (-t, (x'_0, x'_1)) + 2t)\right).$$

Les isométries de  $S$  s'étendent  
en homéomorphismes de  $\partial_\infty^* S$ .



# SUR LE NOYAU D'EUCLIDE-CYGAN

Les isométries de  $S$  s'étendent  
en homéomorphismes de  $\partial_{\infty}^* S$ .  
Pas de distance invariante

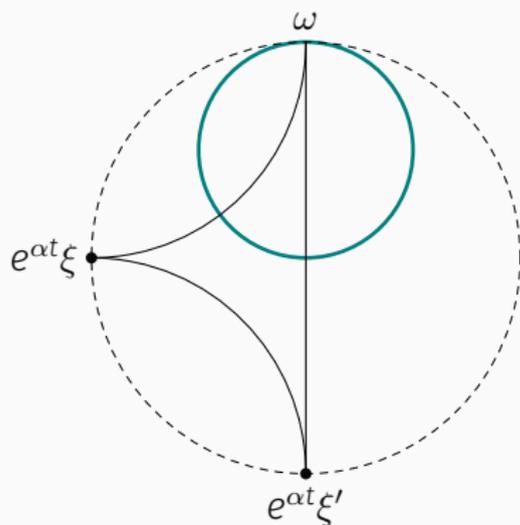


# SUR LE NOYAU D'EUCLIDE-CYGAN

Les isométries de  $S$  s'étendent en homéomorphismes de  $\partial_\infty^* S$ .  
Pas de distance invariante mais pour tous  $\xi, \xi' \in \partial_\infty^* Y$ ,

$$\rho(e^{\alpha t} \xi_0, e^{\alpha t} \xi_1) = e^t \rho(\xi_0, \xi_1).$$

Avec  $\rho$ ,  $\partial_\infty^*$  est **auto-similaire**  
Ses auto-similarités sont les  $e^{\alpha t}$ .



# APPROX. DES PETITES BOULES DE $\rho$ DESSINÉES SUR $\mathbb{R}^2$

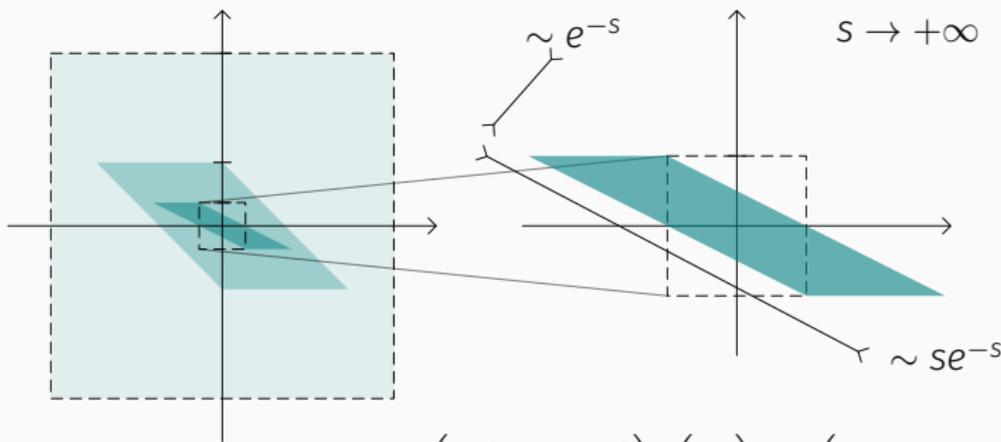
$$\begin{array}{l} \text{Groupe} \\ \text{auto-similarités} \end{array} \left\| \left\{ \begin{array}{c} S \text{ isom. } \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3 \\ \left( \begin{array}{cc} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{array} \right) \end{array} \right\} \middle| \left\{ \begin{array}{c} S' \\ \left( \begin{array}{cc} e^{te} & te^t \\ 0 & e^t \end{array} \right) \end{array} \right\} \middle| \left\{ \begin{array}{c} S_{\mu} (\mu > 1) \\ \left( \begin{array}{cc} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

# APPROX. DES PETITES BOULES DE $\rho$ DESSINÉES SUR $\mathbb{R}^2$

Groupe auto-similarités

$$\left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^{te} & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ S_\mu (\mu > 1) \right\} \right\|$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \right\}$$

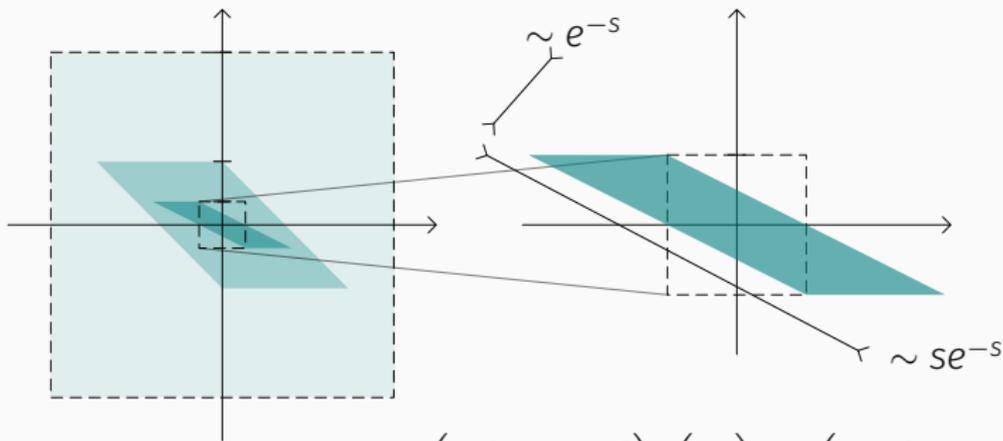


$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \mp se^{-s} \\ \pm e^{-s} \end{pmatrix}$$

# APPROX. DES PETITES BOULES DE $\rho$ DESSINÉES SUR $\mathbb{R}^2$

Groupe auto-similarités

$$\left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^{te} & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ S_\mu (\mu > 1) \right. \right. \left. \left. \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \right\} \right\|$$

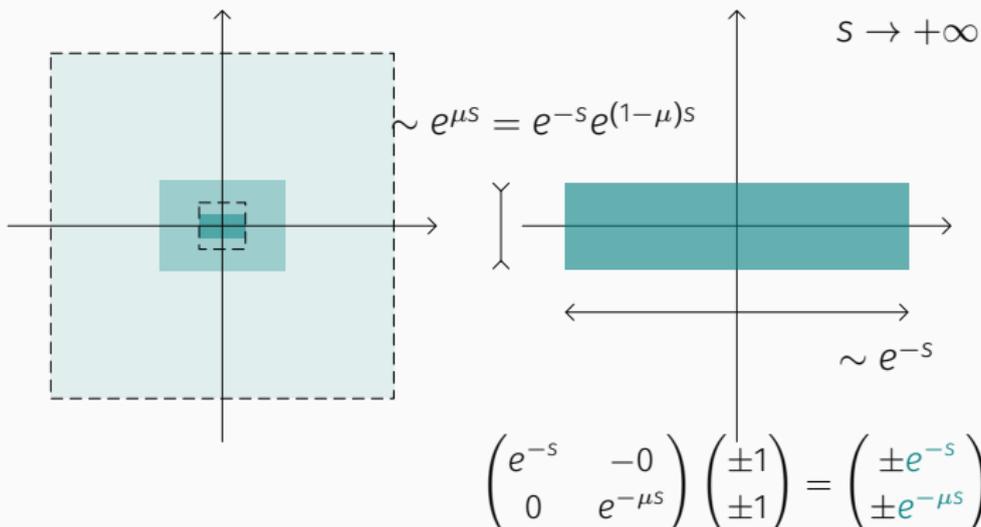


$$\begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-s} \mp se^{-s} \\ \pm e^{-s} \end{pmatrix}$$

# APPROX. DES PETITES BOULES DE $\rho$ DESSINÉES SUR $\mathbb{R}^2$

Groupe auto-similarités

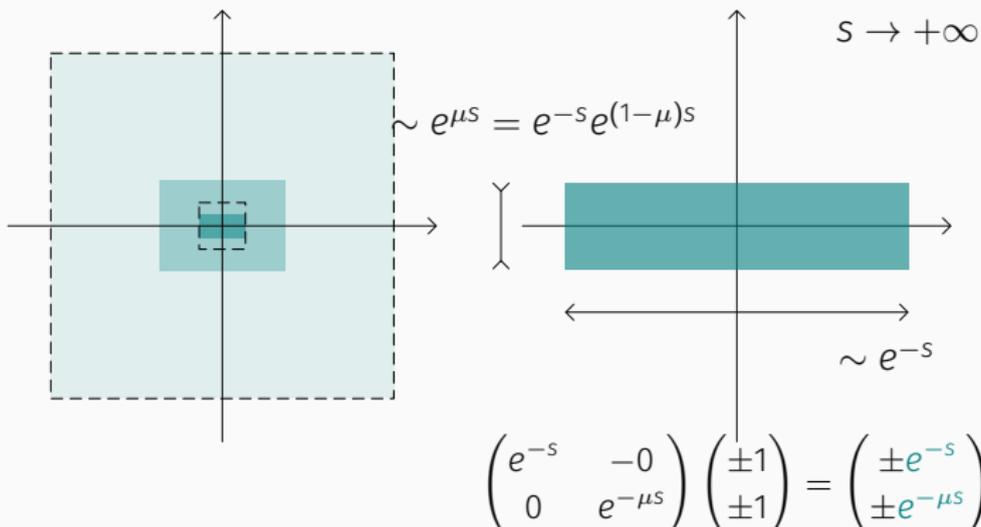
$$\left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^{te} & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{matrix} S_\mu (\mu > 1) \\ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \right\|$$



# APPROX. DES PETITES BOULES DE $\rho$ DESSINÉES SUR $\mathbb{R}^2$

Groupe auto-similarités

$$\left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{pmatrix} e^{te} & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left\{ \begin{matrix} S_\mu (\mu > 1) \\ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \right\|$$



# QUASISOMETRIES AND THE BOUNDARY

Soit  $\tau \geq 0$ . Un couple d'ensemble  $(a, a^+)$  dans un espace quasimétrique est une  $\tau$ -**couronne** intérieure s'il y a une boule  $B$  telle que  $B \subseteq a \subseteq a^+ \subseteq e^\tau B$ .  $\text{rayon}(B)$  est un **rayon interne** et  $\tau$  une **asphéricité** pour  $(a, a^+)$ .

Un homéomorphisme est dit quasisymétrique s'il **préserve l'asphéricité bornée**, c-à-d. toute  $\tau$ -couronne est envoyée sur une famille de  $\tau'$ -couronne avec  $\tau'$  ne dépendant que de  $\tau$ .

# QUASIIISOMETRIES AND THE BOUNDARY

Soit  $\tau \geq 0$ . Un couple d'ensemble  $(a, a^+)$  dans un espace quasimétrique est une  $\tau$ -**couronne** intérieure s'il y a une boule  $B$  telle que  $B \subseteq a \subseteq a^+ \subseteq e^\tau B$ .  $\text{rayon}(B)$  est un **rayon interne** et  $\tau$  une **asphéricité** pour  $(a, a^+)$ .

Un homéomorphisme est dit quasisymétrique s'il **préserve l'asphéricité bornée**, c-à-d. toute  $\tau$ -couronne est envoyée sur une famille de  $\tau'$ -couronne avec  $\tau'$  ne dépendant que de  $\tau$ .

## Théorème (1970s-1980s)

Soient  $S$  et  $S'$  des groupes de Heintze. Supposons qu'il existe une quasiisométrie  $f: Y \rightarrow Y'$ . Alors  $\partial_\infty f$  s'étend en un homéomorphisme  $\partial_\infty f: \partial_\infty Y \rightarrow \partial_\infty Y'$ . De plus on peut supposer que  $f$  envoie les points focaux l'un sur l'autre, et  $\partial_\infty f: \partial_\infty^* Y \rightarrow \partial_\infty^* Y'$  est quasisymétrique.

# CÔNE HYPERBOLIQUE ET BORD DE GROMOV

La classe quasisymétrique de  $\partial_\infty^* S$  correspond à la structure à grande échelle de  $S$ .

$\partial_\infty^* S$	$S$
$\mathbf{R}^n$ euclidien	$\mathbb{H}^{n+1} = \{\text{dilatations scalaires}\} \times \mathbf{R}^n$
$\mathbf{R}^2$ unipotent	$S' = \{\text{dilatations unipotentes}\} \times \mathbf{R}^2$
$\mathbf{R}^2$ diagonal	$S_\mu = \{\text{dilatations diagonales}\} \times \mathbf{R}^2$
$\mathbf{Heis}^n$ sous-riemannien	$\mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1} = \{\text{dilatations de Carnot}\} \times \mathbf{Heis}^n$
q.s. homeo $\partial_\infty S \rightarrow \partial_\infty T$	<b>quasiisométrie <math>S \rightarrow T</math></b>

Soit  $s_n \rightarrow +\infty$ . Une famille de couronnes  $(a_n, a_n^+)$  de  $(\partial_\infty^*, \rho)$  de rayons internes  $e^{-s_n}$  et d'asphéricités  $\tau_n$  est **d'asphéricité sous-linéaire** si  $\tau_n \ll |s_n|$  (quantitativement :  $\tau_n = O(v(n))$ ).

Soit  $s_n \rightarrow +\infty$ . Une famille de couronnes  $(a_n, a_n^+)$  de  $(\partial_\infty^*, \rho)$  de rayons internes  $e^{-s_n}$  et d'asphéricités  $\tau_n$  est **d'asphéricité sous-linéaire** si  $\tau_n \ll |s_n|$  (quantitativement :  $\tau_n = O(v(n))$ ).

## Definition (P.)

Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **préservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

Soit  $s_n \rightarrow +\infty$ . Une famille de couronnes  $(a_n, a_n^+)$  de  $(\partial_\infty^*, \rho)$  de rayons internes  $e^{-s_n}$  et d'asphéricités  $\tau_n$  est **d'asphéricité sous-linéaire** si  $\tau_n \ll |s_n|$  (quantitativement :  $\tau_n = O(v(n))$ ).

## Definition (P.)

Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **préservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

## Théorèmes

Les SBE se prolongent à  $\partial_\infty^* Y$  (ou bord Gromov), quantitativement

1. (Cornulier 2017) en homéomorphismes biHölder.

Soit  $s_n \rightarrow +\infty$ . Une famille de couronnes  $(a_n, a_n^+)$  de  $(\partial_\infty^*, \rho)$  de rayons internes  $e^{-s_n}$  et d'asphéricités  $\tau_n$  est **d'asphéricité sous-linéaire** si  $\tau_n \ll |s_n|$  (quantitativement :  $\tau_n = O(v(n))$ ).

## Definition (P.)

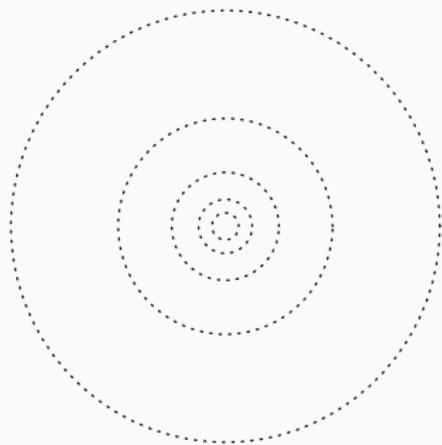
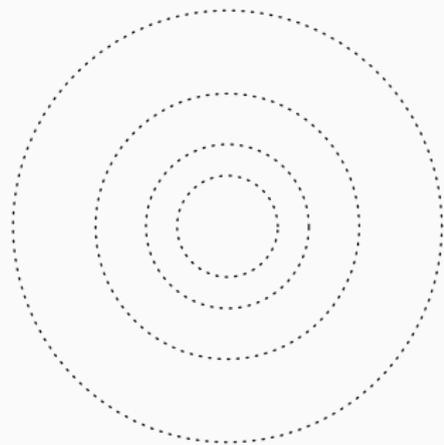
Un homéomorphisme est sous-linéairement quasisymétrique s'il est **biHölder** et si lui et son inverse **préservent l'asphéricité sous-linéaire** pour toute famille de couronnes.

## Théorèmes

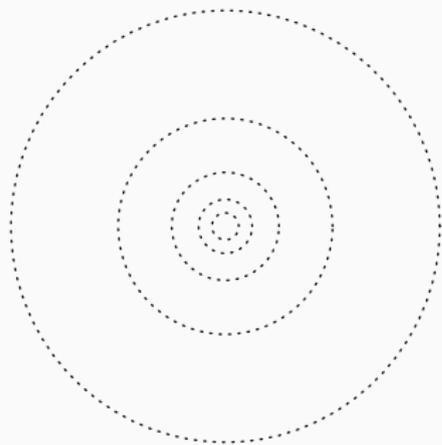
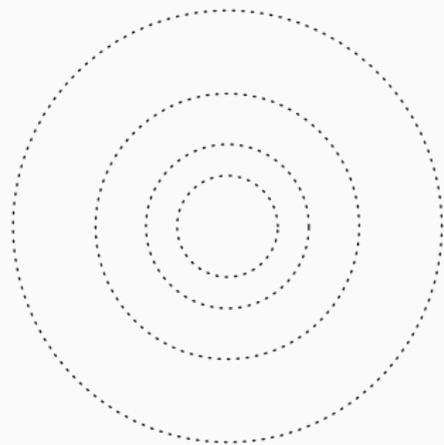
Les SBE se prolongent à  $\partial_\infty^* Y$  (ou bord Gromov), quantitativement

1. (Cornulier 2017) en homéomorphismes biHölder.
2. (P.) en homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques.

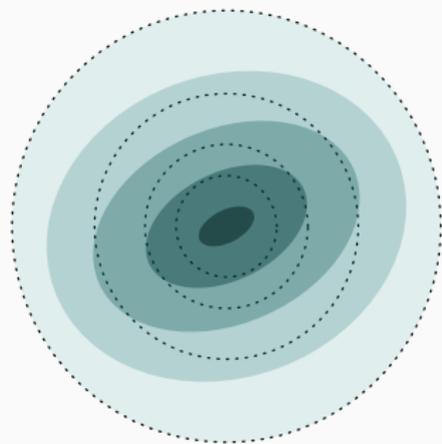
# L'ASPHÉRICITÉ SOUS-LINÉAIRE EST PRÉSERVÉE



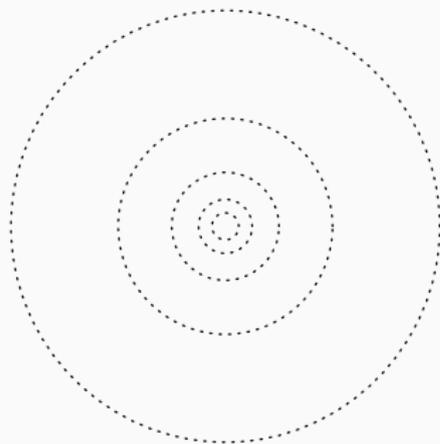
# L'ASPHÉRICITÉ SOUS-LINÉAIRE EST PRÉSERVÉE



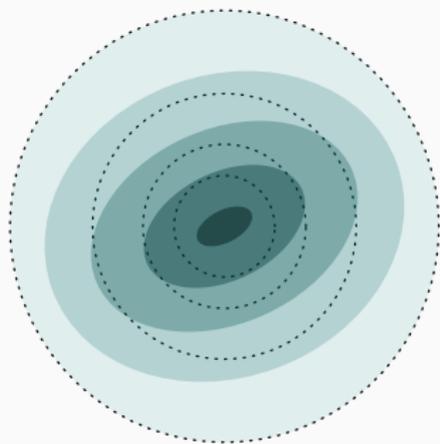
# L'ASPHÉRICITÉ SOUS-LINÉAIRE EST PRÉSERVÉE



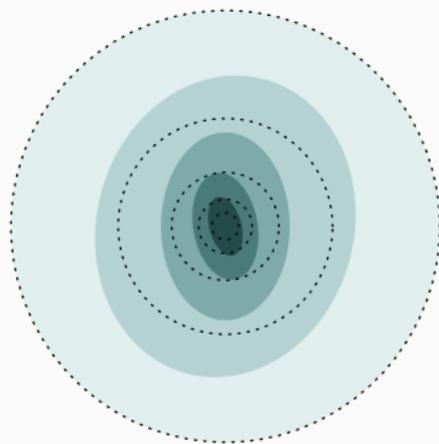
$$\tau_n = O(\sqrt{n})$$



# L'ASPHÉRICITÉ SOUS-LINÉAIRE EST PRÉSERVÉE



$$\tau_n = O(\sqrt{n})$$



$$\tau'_n = O(\sqrt{n})$$

**Figure:** Homéomorphisme sous-linéairement quasimétrique de  $\mathbf{R}^2$  euclidien préservant l'asphéricité de classe  $O(\sqrt{n})$

## Observation (Cornulier 2008, 2011)

$\mathbb{H}_R^3$  et  $S'$  sont SBE via l'identité en coordonnées horosphériques (centrées au point focal pour  $S'$ ).

## Observation (Cornulier 2008, 2011)

$\mathbb{H}_R^3$  et  $S'$  sont SBE via l'identité en coordonnées horosphériques (centrées au point focal pour  $S'$ ).

## Observation (Cornulier 2008, 2011)

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$  sont SBE via l'identité en coordonnées horosphériques (centrées au point focal pour  $S'$ ).

On le constate aussi au bord : l'identité (via l'identification avec  $\mathbb{R}^2$ ) est sous-linéairement quasisymétrique. Précisément  $v = O(\log)$ .

# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,

# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

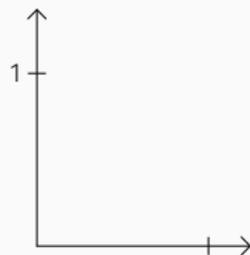
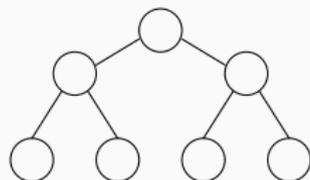
## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,

# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

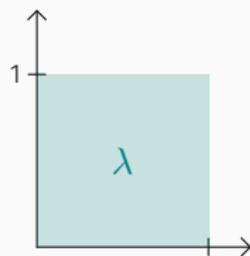
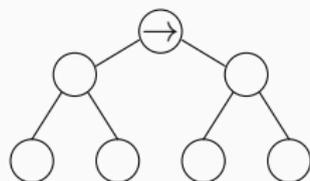


# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

1<sup>ère</sup> étape Obtenir une mesure aléatoire  $M$  sur  $[0, 1]$ .

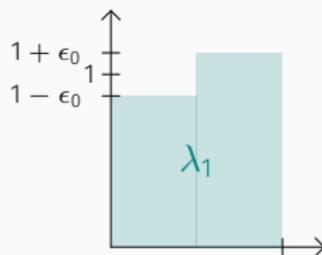
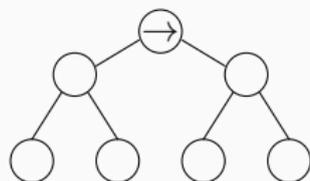


# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

1<sup>ère</sup> étape Obtenir une mesure aléatoire  $M$  sur  $[0, 1]$ .

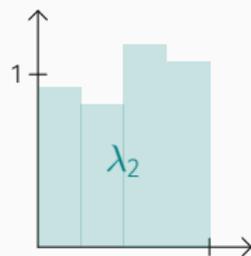
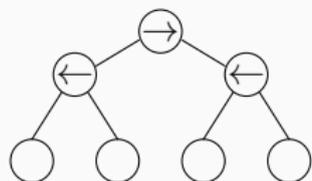


# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

1<sup>ère</sup> étape Obtenir une mesure aléatoire  $M$  sur  $[0, 1]$ .

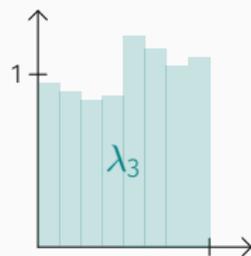
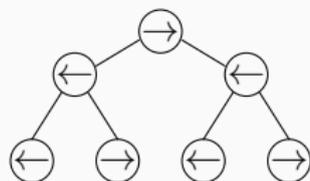


# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

1<sup>ère</sup> étape Obtenir une mesure aléatoire  $M$  sur  $[0, 1]$ .

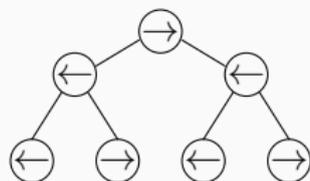


# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (I)

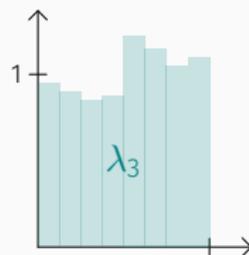
## Ingrédients

- La mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ ,
- Une famille décroissante  $\epsilon_n \downarrow 0$  de limite nulle **mais pas dans**  $\ell^1$ ,
- Un arbre binaire enraciné
- $\aleph_0$  variables aléatoires i.i.d. dans  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

1<sup>ère</sup> étape Obtenir une mesure aléatoire  $M$  sur  $[0, 1]$ .



$$M = \lim_n \lambda_n$$



## COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (II)

**2<sup>ème</sup> étape :** Prendre la primitive  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  au sens des distributions.

- $\phi$  n'est pas abs. continue. La dérivée est  $\lambda$ -p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne :  
 $\log |\phi(x) - \phi(y)| \leq \log |x - y| + v(\log |x - y|), v(r) \ll r.$

## COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (II)

**2<sup>ème</sup> étape :** Prendre la primitive  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  au sens des distributions.

- $\phi$  n'est pas abs. continue. La dérivée est  $\lambda$ -p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne :  
 $\log |\phi(x) - \phi(y)| \leq \log |x - y| + v(\log |x - y|), v(r) \ll r.$

**3<sup>ème</sup> étape :** Pour obtenir un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique du tore,  $\Phi = \phi_1 \times \phi_2$ , où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont comme précédemment. N'a pas la propriété ACL.

# COMMENT FAIRE DE TELS HOMÉOMORPHISMES (II)

**2<sup>ème</sup> étape :** Prendre la primitive  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  au sens des distributions.

- $\phi$  n'est pas abs. continue. La dérivée est  $\lambda$ -p.p. 0. Le module de continuité est presque celui d'une fonction lipschitzienne :  
 $\log |\phi(x) - \phi(y)| \leq \log |x - y| + v(\log |x - y|), v(r) \ll r.$

**3<sup>ème</sup> étape :** Pour obtenir un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique du tore,  $\Phi = \phi_1 \times \phi_2$ , où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont comme précédemment. N'a pas la propriété ACL.

## Proposition

$\phi$  and  $\Phi$  sont sous-linéairement quasisymétriques. La distorsion d'asphéricité à l'échelle  $s$  est bornée par  $(\sum_{n < -\log_2 s} \epsilon_n)$ .

# INVARIANTS POUR LES GROUPES DE HEINTZE

---

La **dimension topologique**, la **dimension conforme** (déf. ci-dessous) sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

La **dimension topologique**, la **dimension conforme** (déf. ci-dessous) sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

$$\text{Cdim}(Z) = \inf \left\{ p > 0 : \text{mod}_p^{\{\tau_j\}}(\text{courbes non ponctuelles dans } Z) = 0 \right\}$$

$\{\tau_j\}$  sont des paramètres d'asphéricité pour mesures d'empilement;  $\text{mod}_p^{\{\tau_j\}}$  sont des modules grossiers (Pansu). On construit une variante.

# DIMENSIONS CONFORMES

La **dimension topologique**, la **dimension conforme** (déf. ci-dessous) sont invariantes par homéomorphismes quasisymétrique.

$$\text{Cdim}(Z) = \inf \left\{ p > 0 : \text{mod}_p^{\{\tau_j\}}(\text{courbes non ponctuelles dans } Z) = 0 \right\}$$

$\{\tau_j\}$  sont des paramètres d'asphéricité pour mesures d'empilement;  $\text{mod}_p^{\{\tau_j\}}$  sont des modules grossiers (Pansu). On construit une variante.

Espace autosimilaire	Dimension sous-linéaire-conforme
$\mathbb{R}^2$ avec $\alpha$ scalaire ou unipotent	2
$\mathbb{R}^2$ avec $\alpha = \text{diag}(1, \mu)$	$1 + \mu$
Général (nilpotent, $\alpha$ dilatante)	$\text{trace}(\alpha)$ .

# RETOUR SUR LE THÉORÈME I

$Y$	$\dim \partial_\infty Y$	(SublinCdim $\partial_\infty Y$ )
$\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}$	$n$	$n$
$\mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}$	$2n + 1$	$2n + 2$
$\mathbb{H}_{\mathbf{H}}^{n+1}$	$4n + 3$	$4n + 6$
$\mathbb{H}_{\mathbf{O}}^2$	15	22

# RETOUR SUR LE THÉORÈME I

$Y$	$\dim \partial_\infty Y$	$(\text{SublinCdim } \partial_\infty Y)$
$\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}$	$n$	$n$
$\mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}$	$2n + 1$	$2n + 2$
$\mathbb{H}_{\mathbf{H}}^{n+1}$	$4n + 3$	$4n + 6$
$\mathbb{H}_{\mathbf{O}}^2$	$15$	$22$

La paire d'invariants  $(\dim \partial_\infty Y, \text{SublinCdim } \partial_\infty)$  classe les espaces symétriques de rang un.

$Y$	$\dim \partial_\infty Y$	$(\text{SublinCdim } \partial_\infty Y)$
$\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^{n+1}$	$n$	$n$
$\mathbb{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}$	$2n + 1$	$2n + 2$
$\mathbb{H}_{\mathbf{H}}^{n+1}$	$4n + 3$	$4n + 6$
$\mathbb{H}_{\mathbf{O}}^2$	15	22

La paire d'invariants  $(\dim \partial_\infty Y, \text{SublinCdim } \partial_\infty Y)$  classe les espaces symétriques de rang un. (Dans ce cas, sur  $\partial_\infty^* Y$ , une distance dite de Carnot-Carathéodory réalise la dimension conforme. Une telle distance n'est pas disponible en général).

## RETOUR SUR LE THÉORÈME II

Cdim ne suffit pas à distinguer  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$ , 3 méthodes: Q-capacité (Kleiner-Xie), cohomologie  $\ell^{\phi}$  (Carrasco-Piaggio) ou version localement compacte de la rigidité QI (Cornulier). Les 2 premières donnent aussi :

# RETOUR SUR LE THÉORÈME II

Cdim ne suffit pas à distinguer  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$ , 3 méthodes: Q-capacité (Kleiner-Xie), cohomologie  $\ell^{\phi}$  (Carrasco-Piaggio) ou version localement compacte de la rigidité QI (Cornulier). Les 2 premières donnent aussi :

## Théorème (Xie 2011 Carrasco -Piaggio 2014)

Soit  $\{S, T\}$  groupes de Heintze purement réels tels que  $[S, S]$  et  $[T, T]$  sont abéliens. Si  $S$  et  $T$  sont QI alors ils sont isomorphes.

# RETOUR SUR LE THÉORÈME II

Cdim ne suffit pas à distinguer  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $S'$ , 3 méthodes: Q-capacité (Kleiner-Xie), cohomologie  $\ell^{\phi}$  (Carrasco-Piaggio) ou version localement compacte de la rigidité QI (Cornulier). Les 2 premières donnent aussi :

## Théorème (Xie 2011 Carrasco -Piaggio 2014)

Soit  $\{S, T\}$  groupes de Heintze purement réels tels que  $[S, S]$  et  $[T, T]$  sont abéliens. Si  $S$  et  $T$  sont QI alors ils sont isomorphes.

## Théorème (P. 2019)

$\{S, T\}$  paire de groupes de Heintze purement réels tels que  $[S, S]$  et  $[T, T]$  sont abéliens **et**  $\alpha_S, \alpha_T$  **sont diagonalisables**. Si  $S$  et  $T$  sont SBE alors ils sont isomorphes.

# GROUPES DE HEINTZE MÉTABÉLIENS (I)

Obs1. Les quasiconformes  $C^1$   
entre domaines de  $\mathbf{C}$   
quasi-préservent l'énergie  
de Dirichlet.

# GROUPES DE HEINTZE MÉTABÉLIENS (I)

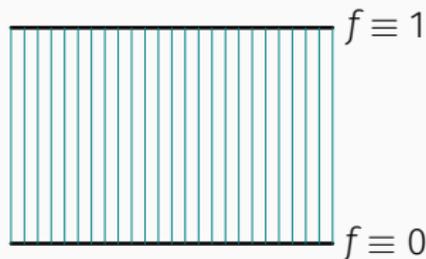
Obs1. Les quasiconformes  $C^1$   
entre domaines de  $\mathbf{C}$   
quasi-préservent l'énergie  
de Dirichlet.

Obs2. Bornes sur les modules  $\leftrightarrow$   
Bornes sur les énergies.

# GROUPES DE HEINTZE MÉTABÉLIENS (I)

Obs1. Les quasiconformes  $C^1$   
entre domaines de  $\mathbf{C}$   
quasi-préservent l'énergie  
de Dirichlet.

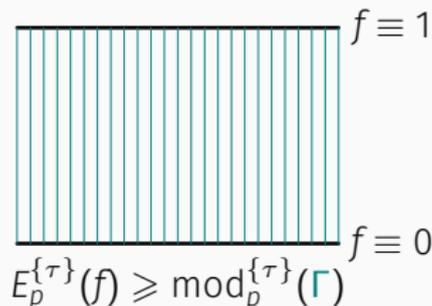
Obs2. Bornes sur les modules  $\leftrightarrow$   
Bornes sur les énergies.



# GROUPES DE HEINTZE MÉTABÉLIENS (I)

Obs1. Les quasiconformes  $C^1$   
entre domaines de  $\mathbb{C}$   
quasi-préservent l'énergie  
de Dirichlet.

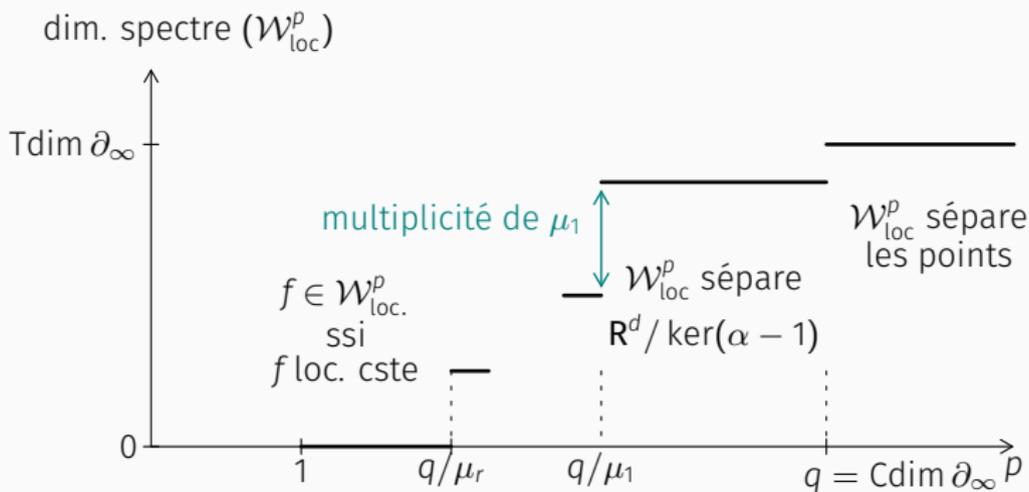
Obs2. Bornes sur les modules  $\leftrightarrow$   
Bornes sur les énergies.



On définit des algèbres de fonctions  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{p, \{\tau\}}$  ( $p$ -énergie bornée, et continues); si  $\varphi$  est un homéomorphisme sous-linéairement quasisymétrique alors  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{p, \{\tau'\}}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\text{loc}}^{p, \{\tau\}}(\varphi^{-1}\Omega)$  pour  $\Omega$  ouvert à l'arrivée.  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{p, \{\tau\}}(\Omega)$  est une algèbre de Fréchet dont le spectre est le plus grand quotient de  $\Omega$  qu'elle sépare.

# GROUPES DE HEINTZE MÉTABÉLIENS (II)

$$S = \mathbf{R} \times_{\alpha} \mathbf{R}^d, \text{sp}(\alpha) = \{1, \mu_1, \dots, \mu_r\}$$



# THÉORÈME DE CORNULIER (POUR LES GROUPES DE HEINTZE)

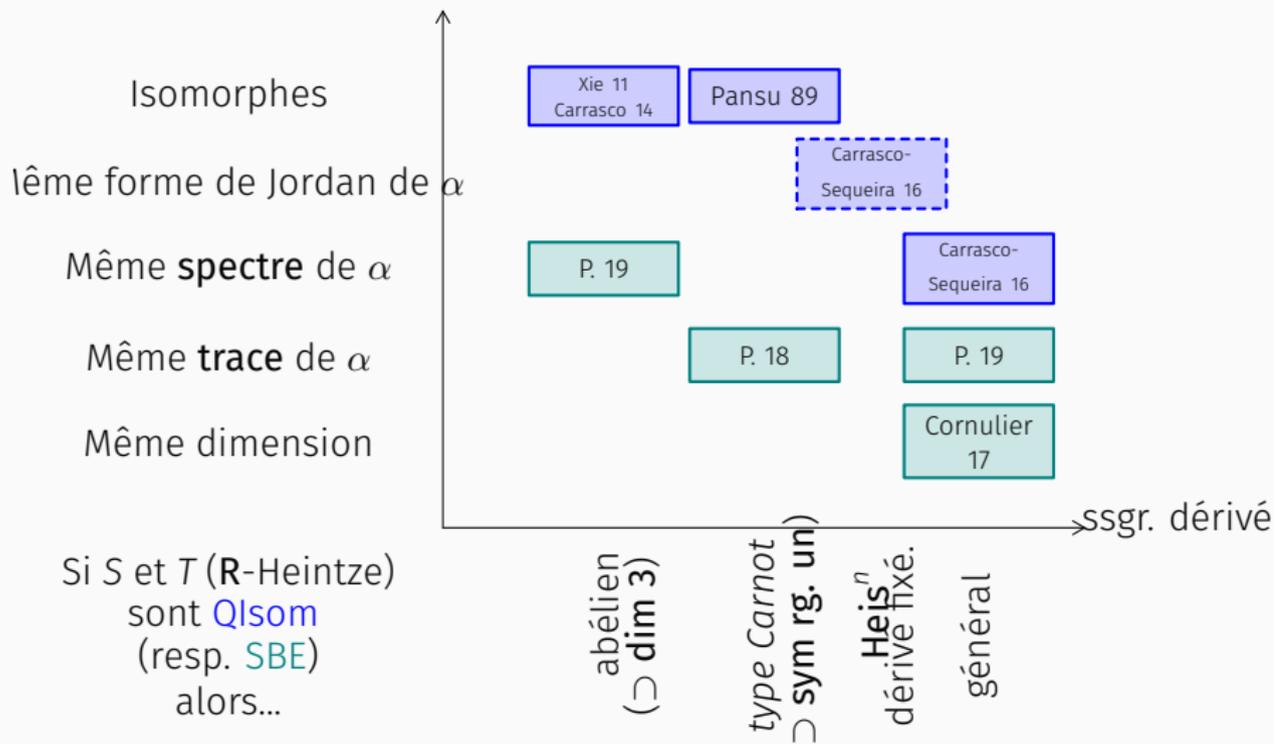
Soit  $S$  un groupe de Heintze purement réel,  $\alpha$  sa dérivation structurelle. On forme  $S_\infty$  avec la même structure mais en ne conservant que la partie semi-simple de  $\alpha$ .

**Théorème (Cornulier 2008, 2011) généralisant l'observation**

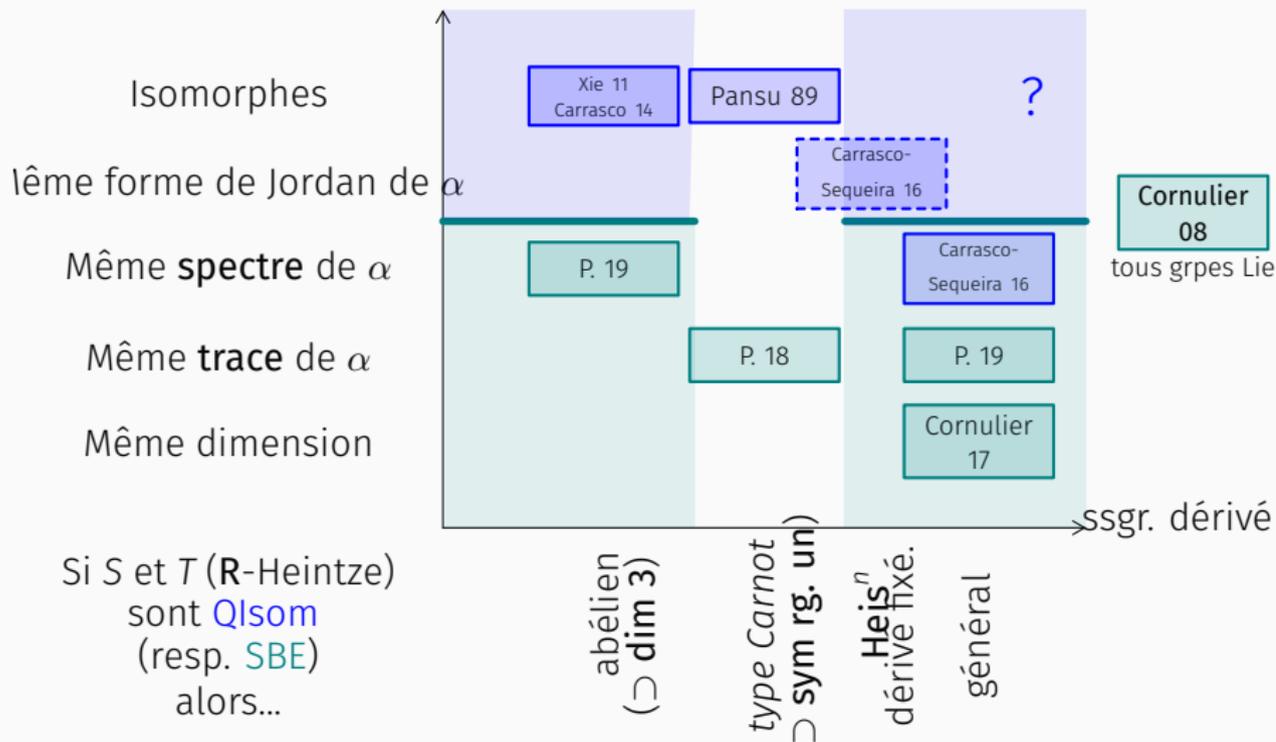
$S$  et  $S_\infty$  sont  $O(\log)$ -SBE.

Avec le th. précédent, pour  $\{S, T\}$  paire de groupes de Heintze purement réels tels que  $[S, S]$  et  $[T, T]$  sont abéliens, si  $S$  et  $T$  sont SBE alors  $S_\infty$  et  $T_\infty$  sont isomorphes.

# CLASSIFICATIONS DES GROUPES DE HEINTZE



# CLASSIFICATIONS DES GROUPES DE HEINTZE



# QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

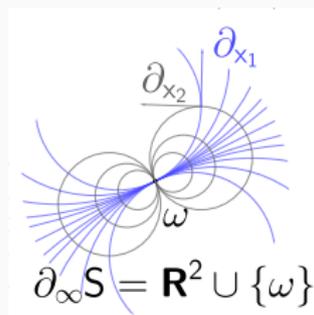
1. A-t-on que si  $S$  et  $T$  Heintze  
purement réels sont  
 $o(\log)$ -SBE alors ils sont  
isomorphes ? Pour  $S$  et  $T$  de  
dim 3 ?

# QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

1. A-t-on que si  $S$  et  $T$  Heintze purement réels sont  $o(\log)$ -SBE alors ils sont isomorphes ? Pour  $S$  et  $T$  de  $\dim 3$  ?
2. Peut-on décrire le groupe des SBE d'un groupe de Heintze ? ou au moins certaines caractéristiques de son action au bord.

# QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

1. A-t-on que si  $S$  et  $T$  Heintze purement réels sont  $o(\log)$ -SBE alors ils sont isomorphes ? Pour  $S$  et  $T$  de  $\dim 3$  ?
2. Peut-on décrire le groupe des SBE d'un groupe de Heintze ? ou au moins certaines caractéristiques de son action au bord. (Dans le cas focal on s'attend à ce qu'il fixe  $\omega$ ).

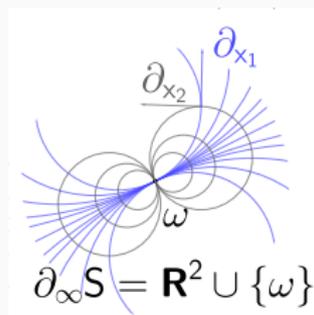


Dans  $\partial_{\infty}S$ , le **point focal**  $\omega$ .

# QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

1. A-t-on que si  $S$  et  $T$  Heintze purement réels sont  $o(\log)$ -SBE alors ils sont isomorphes ? Pour  $S$  et  $T$  de  $\dim 3$  ?
2. Peut-on décrire le groupe des SBE d'un groupe de Heintze ? ou au moins certaines caractéristiques de son action au bord. (Dans le cas focal on s'attend à ce qu'il fixe  $\omega$ ).
3. Rigidité : pas au sens généralisé aux groupes

localement compacts, mais possible pour les groupes de type fini.



Dans  $\partial_\infty S$ , le **point focal**  $\omega$ .

Merci pour votre attention.