Quadrature n° 77 (2010) 40–44
© EDP Sciences, 2010
DOI: 10.1051/quadrature/2010010

Coloriages spéculaires*

par Gabriel Pallier**, Camille Freppel***, William Fujiwara**, Julien Moussou† et Jacques Darné‡

Résumé.
Ce texte est la présentation de la solution de l'équipe France 1 à un problème de recherche posé à l'ITYM (rédigée par G. Pallier et C. Freppel). Le problème initial concerne une condition de coloriage d'un damier. Les membres de cette équipe ont traduit ce problème en termes de graphes, puis ont mis en place une approche algorithmique qui permet d'obtenir le comportement asymptotique à partir du cas d'un damier réduit à une ligne.

I Introduction

La première édition de l'*International Tournament of Young Mathematicians* (www.itym.org) s'est déroulée du 27 juin au 3 juillet 2009. Cette compétition s'adresse aux lycéens. Elle est organisée par le département de mathématiques de l'université Paris-Sud XI à l'initiative de David Zmiaikou, doctorant à l'université Paris-Sud d'Orsay. Cette compétition est soutenue, par ailleurs, par la région Île-de-France, l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique et l'association Animath. Six équipes venues de Russie, Biélorussie, Bulgarie (2) et France (2) se sont rencontrées lors de ce tournoi. Des tournois similaires sont organisés depuis longtemps dans les pays de l'Est, notamment en Biélorussie, mais c'est la première fois que le principe de ce tournoi (en temps non limité) est appliqué au niveau international.

Les différentes équipes ont travaillé durant trois mois sur dix problèmes difficiles, n'ayant pas forcément de solution connue, sélectionnés par le comité international d'organisation. Les solutions et éléments de solutions ont été remis aux organisateurs avant l'épreuve. Lors du tournoi, les équipes étaient réparties en groupes de trois ou quatre avec différents rôles : rapporteur, adversaire, observateur, ou critique. Deux manches ont eu lieu, suivies d'une finale. Le jury international de mathématiciens de la finale était présidé par Jean-Christophe Yoccoz, médaille Fields, professeur au Collège de France.

Nous nous intéressons ici au premier problème de cette compétition, résolu par notre équipe (France 1) en utilisant la théorie des graphes.

Considérons un tableau rectangulaire constitué de $m \times n$ cases carrées dont certaines sont grisées et les autres blanches. Par définition, un coloriage est dit *spéculaire* si pour chaque ligne intérieure (horizontale ou verticale) du tableau, il existe deux cases grisées disposées symétriquement par rapport à cette ligne. Un coloriage spéculaire est *minimal* s'il n'existe pas de coloriage spéculaire contenant moins de cases grises pour m et n donnés. On note $S(m, n)$ le nombre de carrés grisés d'un coloriage spéculaire minimal. Le but du problème était de fournir une estimation de $S(m, n)$.

Dans cet article, nous donnons une caractérisation de certains coloriages spéculaires minimaux, et nous montrons que :

$$S(m,n) = 2(\sqrt{n} + \sqrt{m}) + O(1).$$

II L'étude du cas à une dimension

On rappelle que la notation $O(1)$ signifie que l'erreur faite quand on admet $2(\sqrt{n}+\sqrt{m})$ pour estimation de $S(m, n)$ est majorée par une constante.

Soit un coloriage spéculaire quelconque d'un rectangle de dimensions $1 \times n$, comprenant k cases coloriées. Les cases du rectangle sont repérées

* *L'article a été intégralement rédigé par C. Freppel pour l'introduction et G. Pallier (e-mail :* `gabriel@pallier.org`*) pour le reste de l'article.*

** Lycée Louis Le Grand, Paris.
*** Lycée Bouchardon, Chaumont (52).
† Lycée Marie Curie, Sceaux (92).
‡ Lycée Jeanne Hachette, Beauvais (60).

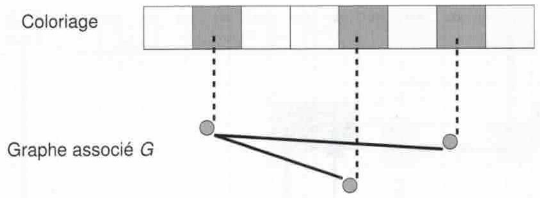

Figure 1. Exemple de coloriage et son graphe associé pour $n = 8$ et $m = 1$.

par les nombres $0, 1, ..., n - 1$. Les lignes intérieures du tableau sont donc dans ce cas toutes verticales, et il y en a exactement $n - 1$. Nous dirons qu'une de ces lignes est *satisfaite* s'il existe deux cases coloriées symétriquement par rapport à cette ligne (ces deux cases sont alors repérées par des nombres de parités différentes). On introduit le graphe G associé à ce coloriage, où chaque case grisée correspond à un sommet, et deux sommets sont reliés si et seulement si les deux cases coloriées sont symétriques par rapport à une ligne (voir un exemple sur la figure 1).

Chaque arête du graphe correspond à une ligne satisfaite (mais une ligne satisfaite peut être représentée par plusieurs arêtes). Si N est le nombre d'arêtes de G, dans le cas où le coloriage est spéculaire, nous avons nécessairement $N \geqslant n - 1$ (toutes les lignes sont satisfaites).

On peut aussi remarquer que le graphe G est sans triangle, c'est-à-dire que trois cases ne peuvent pas satisfaire trois lignes, car elles ne peuvent pas être repérées par trois nombres de parités distinctes deux à deux.

Nous aurons besoin du théorème 1 suivant :

Théorème 1 (Mantel). *Le nombre d'arêtes d'un graphe sans triangle à k sommets est au plus égal à $\lfloor \frac{k^2}{4} \rfloor$.*

Ce résultat, dû à Mantel en 1907, a fait l'objet d'une généralisation en 1941 par le mathématicien hongrois Turán concernant les graphes qui ne contiennent aucun p-sous-graphe complet, quand $p \leq 2$. Le cas d'égalité du théorème de Mantel est atteint pour un graphe particulier nommé *bipartite complet*, que nous rencontrerons dans la suite.

On en déduit une première minoration : le graphe G ayant au moins $n - 1$ arêtes et ne possédant aucun triangle, son nombre k de sommets est tel que $\frac{k^2}{4} \geq n - 1$, d'où :

$$S(1, n) \geqslant 2\sqrt{n-1}. \qquad (1)$$

Cherchons maintenant une majoration. Si l'on repère chaque ligne intérieure par la somme des nombres des deux cases adjacentes, une ligne est satisfaite si et seulement si il existe deux cases grisées dont la somme est égale au nombre repérant cette ligne. Nous allons utiliser le fait que chaque nombre impair s inférieur à n s'écrit sous la forme $s = q(2p) + r$ $(2qp \leq n,\ r \leq 2p)$, où p est un entier quelconque que l'on peut choisir arbitrairement et r est un nombre impair (reste de la division euclidienne de s par $2p$). Après avoir choisi un nombre p plus petit que $\frac{n}{2}$, nous pouvons donc commencer par colorier les cases $0, 2p, 4p, ..., 2p \times \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor$ ainsi que les p cases impaires $1, 3, 5, ..., 2p - 1$. Ainsi, toutes les lignes entre 1 et $2p \times \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor + 2p - 1$ seront satisfaites. Cela correspond à toutes les lignes de la première moitié du segment $1 \times n$ (puisque $2p \times \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor \geqslant n - 2p + 1$). Il faut donc encore colorier p cases impaires à droite du segment. Dans la plupart des cas, l'une des deux dernières cases n'est alors pas encore grisée ; on complète donc le coloriage à cet endroit pour que les dernières lignes soient satisfaites. On obtient finalement bien un coloriage spéculaire (voir figure 2).

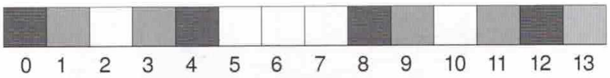

Figure 2. Exemple de coloriage suivant la méthode décrite pour $n = 14$ et $p = 2$.

L'étape suivante est de déterminer le nombre p pour lequel, selon cette méthode de coloriage, on obtient le moins de cases coloriées possible. Le nombre de cases coloriées est donné par une fonction f de n et p :

$$f(n, p) = \frac{n}{(2p)} + 2p + O(1). \qquad (2)$$

Ici, une courte étude de fonction nous indique que le nombre p le plus approprié (notons-le $p_{\max}$) est l'entier le plus proche de $\frac{\sqrt{n}}{2}$, qui correspond à un nombre de cases grisées égal à $f(n, p_{\max}) = 2\sqrt{n} + O(1)$.

En fait, cette optimisation revient à construire le graphe bipartite complet, cas d'égalité du théorème de Mantel. Le graphe bipartite complet à n sommets est formé par la réunion de deux *cliques*, c'est-à-dire de deux sous-graphes sans arêtes (ici, les ensembles de sommets pairs et impairs), de même taille (ou à 1 près si le nombre total de sommets est impair), chaque couple de sommets, possédant un sommet dans chacune des cliques, étant relié par une arête (voir figure 3).

En associant la majoration et la minoration, nous parvenons à l'estimation de $S(1, n)$:

$$S(1, n) = 2\sqrt{n} + O(1). \qquad (3)$$

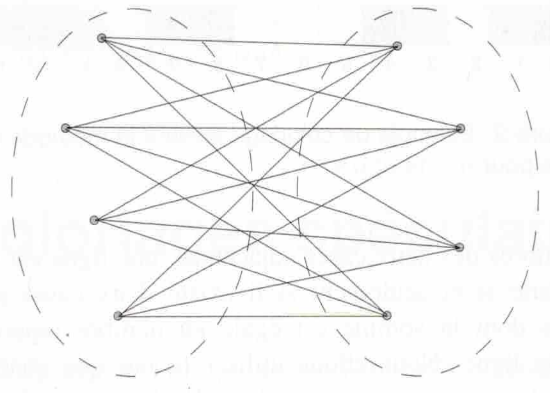

Figure 3. Graphe bipartite complet à huit sommets. Les deux cliques sont représentées à gauche et à droite.

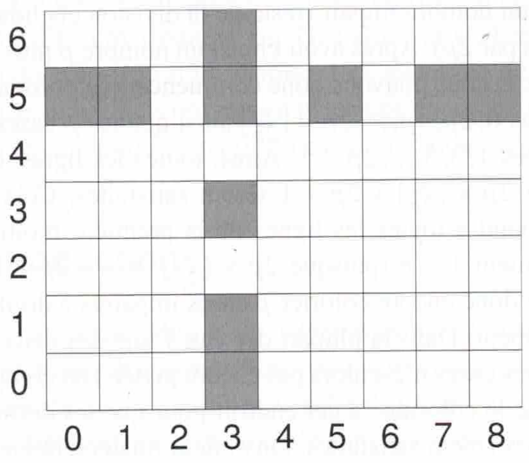

Figure 4. Exemple de coloriage n'utilisant qu'une seule ligne et une seule colonne.

III Cas général

Nous pouvons tout d'abord majorer $S(m,n)$ à l'aide de ce qui précède ; en effet, il est possible de n'utiliser qu'une seule ligne et une seule colonne pour obtenir un coloriage spéculaire. S'il est fait en sorte que leur case d'intersection soit grisée (c'est toujours possible), on obtient :

$$S(m,n) \leqslant S(1,n) + S(1,m) - 1. \qquad (4)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la minoration. Il est tentant de conjecturer que les coloriages « en croix », comme celui de la figure 4, sont bien des coloriages spéculaires minimaux.

Pour prouver cela, nous allons décrire deux algorithmes permettant de transformer un coloriage spéculaire quelconque en déplaçant ses cases grisées, pour obtenir un coloriage spéculaire de même taille contenu dans une croix. Arbitrairement, on peut choisir la première ligne et la première colonne comme destination des cases grisées (dans ce cas, l'ensemble correspondant ne prend plus exactement la forme d'une croix, mais d'une sorte de L).

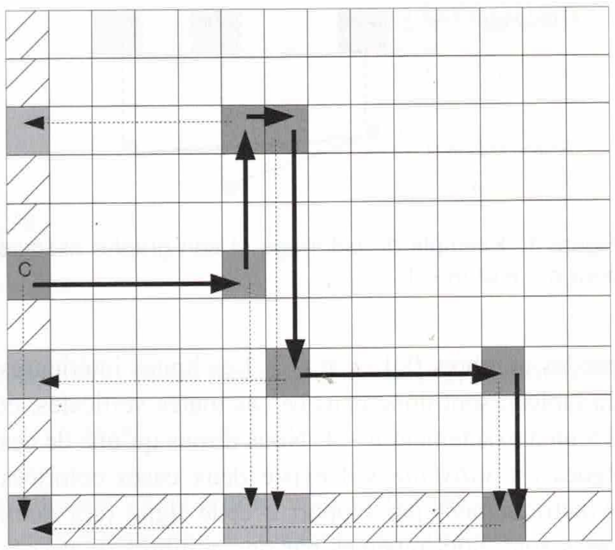

Figure 5. Exemple de projection d'un coloriage de graphe associé connexe dans la première ligne et la première colonne du rectangle. Le parcours du graphe suit les flèches en gras, tandis que les projections sont représentées par des flèches pointillées.

Algorithme 1 (projection)

Dans un premier temps, nous allons expliciter un algorithme que nous nommerons *projection*, s'appliquant à un coloriage spéculaire de graphe associé connexe qui déplace ses cases grisées vers les bords inférieur et gauche du tableau, donnant un coloriage final spéculaire de taille égale ou inférieure.

Supposons que G, graphe associé d'un coloriage spéculaire minimal, soit connexe. Alors on peut le parcourir entièrement en suivant ses arêtes (en passant plusieurs fois au même endroit si nécessaire), et en suivant le protocole suivant : On choisit une case de départ c, dont on colorie les projetés orthogonaux sur la zone hachurée[1] (voir figure 5). Puis on parcourt l'ensemble du graphe, chaque case étant « projetée » sur la première ligne ou sur la première colonne suivant la perpendiculaire à la direction par laquelle on y accède.

Le coloriage de départ contenait au moins une case grise sur la première ligne et une case grise sur la première colonne (dans le cas contraire, les deux premières lignes intérieures du tableau en bas et à gauche ne seraient pas satisfaites). On peut donc choisir de débuter le parcours par une case contenue dans la zone hachurée. À la fin du processus, le nombre de cases grises obtenu est inférieur ou égal à celui du départ (chaque case est projetée une seule fois, hormis la case de départ, mais celle-ci partage son projeté dans

[1] La zone hachurée correspond à l'ensemble constitué par la réunion de la première ligne et la première colonne dans laquelle les cases sont projetées à mesure que le graphe est parcouru.

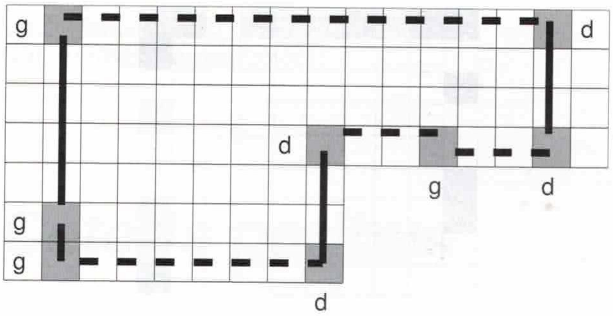

Figure 6. Les deux types d'arêtes h et v sont respectivement représentés avec des traits pleins et des tirets.

le coin inférieur gauche avec celui d'une autre case), et le coloriage obtenu est bien spéculaire. En effet, si deux cases satisfaisaient initialement une ligne horizontale, l'application d'une translation horizontale à ces deux cases pour les amener vers le bord du rectangle conservera cette propriété. De même pour les lignes verticales.

On a donc montré ici que, sous l'hypothèse qu'il existe un coloriage spéculaire minimal dont le graphe associé est connexe, il existe un coloriage spéculaire minimal contenu dans une ligne et une colonne, et le problème est résolu d'après nos précédents résultats.

Algorithme 2 (expansion)

Nous allons maintenant décrire une seconde transformation qui, à partir d'un coloriage spéculaire quelconque, aboutit à un coloriage spéculaire dont le graphe associé est connexe, tout en conservant ou en diminuant le nombre de cases coloriées.

Différencions d'abord, dans le graphe G associé au coloriage de départ, les arêtes qui correspondent à une symétrie de ligne verticale et celles correspondant à une symétrie de ligne horizontale. Ceci peut être réalisé par exemple en leur attribuant respectivement des lettres v et h (voir figure 6).

Une propriété essentielle de G est que tout cycle de ce graphe possède un nombre pair d'arêtes du type v et un nombre pair d'arêtes du type h. Un argument de parité permet de le montrer : à chaque sommet du graphe est associé un élément de l'ensemble $\{0, 1\}^2$, qui est le couple (a, b) des coordonnées de la case modulo 2 (par exemple, le sommet associé à la case grise $(6, 13)$ aura pour couple correspondant $(0, 1)$).

Suivre une arête de type v entraîne un changement du premier nombre, tandis que suivre une arête de type h entraîne un changement du second. De là, tout cycle du graphe doit nécessairement contenir un nombre pair d'arêtes de type h et un nombre pair d'arêtes de type v.

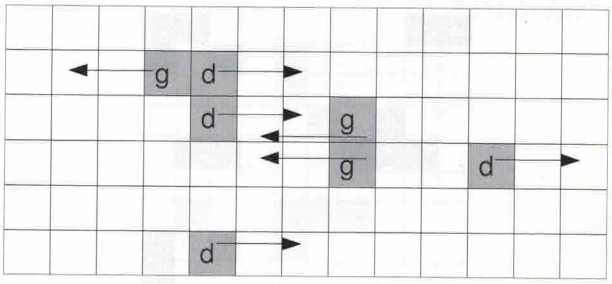

Figure 7. Exemple d'application du second algorithme à une composante dans la direction horizontale.

Cela signifie qu'il est possible d'étiqueter également tous les sommets d'un cycle du graphe, par exemple par des lettres g et d, de manière à ce que :

- chaque couple de sommets liés par une arête de type h possède deux lettres identiques ;
- chaque couple de sommets liés par une arête de type v possède deux lettres différentes.

Mieux, cette distinction entre deux types de sommets peut être étendue à l'ensemble d'une composante connexe du graphe. En effet, il est possible de parcourir une composante entière du graphe en étiquetant progressivement tous ses sommets sans contradiction (c'est-à-dire que l'on aurait obtenu le même résultat en suivant un chemin différent). Si, partant d'un sommet déjà étiqueté, il y a deux chemins possibles pour en atteindre un autre, ces deux chemins forment un cycle, et le second sommet sera étiqueté de la même manière quel que soit le chemin suivi d'après ce qui précède.

Maintenant, appliquons ce résultat : on suppose que le graphe G n'est pas connexe. Nous allons montrer qu'il est possible de faire en sorte que chaque composante possède une case coloriée sur les « bords » verticaux du rectangle (c'est-à-dire, sur la colonne 0 ou $m - 1$).

Considérons une composante qui ne vérifie pas cette propriété. On choisit une de ses cases les plus proches des bords verticaux. Soit alors p la distance de cette case au bord vertical. On étiquette alors tous les sommets de la composante en partant de cette case, à laquelle on a préalablement attribué la lettre g si elle est proche du bord gauche ou d si elle est proche du bord droit. Maintenant, appliquons à la composante la transformation suivante : chaque case grise de la composante dont le sommet associé est marqué d'un d se déplace de p cases vers la droite, et chaque case grisée marquée d'un g se déplace de p cases vers la gauche. Le coloriage obtenu est toujours spéculaire, et la case grise de départ est envoyée sur le bord (voir figure 7).

Ce qui a été fait dans la direction horizontale peut aussi être appliqué verticalement, en faisant effectuer aux cases coloriées des translations vers le haut

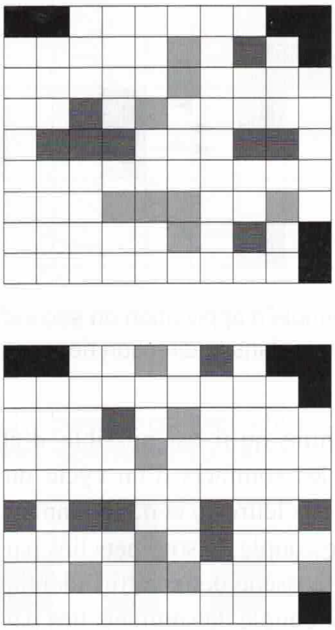

Figure 8. Application de l'algorithme 2 aux composantes connexes d'un coloriage spéculaire (non minimal). Les trois composantes ont été représentées avec différentes nuances de gris.

et le bas. L'association de ces deux transformations entraîne un « éclatement » du coloriage ou plus exactement de ses composantes connexes.

Ainsi, nous arrivons à un coloriage spéculaire de même taille que celui du début (ou plus petit), dont chacune des composantes du graphe associé possède deux cases sur les « bords » verticaux et horizontaux du rectangle. Nous pouvons donc appliquer à chaque composante, séparément, la projection sur les deux bords qu'elle touche et nous parvenons à un coloriage spéculaire contenu entièrement dans les bords du rectangle. En envoyant directement les cases de l'un des bords verticaux sur l'autre (respectivement, avec les cases de l'un des bords horizontaux), on aboutit à un coloriage spéculaire minimal contenu dans une ligne et une colonne.

Le problème est donc ramené au cas à une dimension décrit par (3), et nous avons l'estimation :

$$S(m, n) = 2(\sqrt{n} + \sqrt{m}) + O(1). \qquad (5)$$

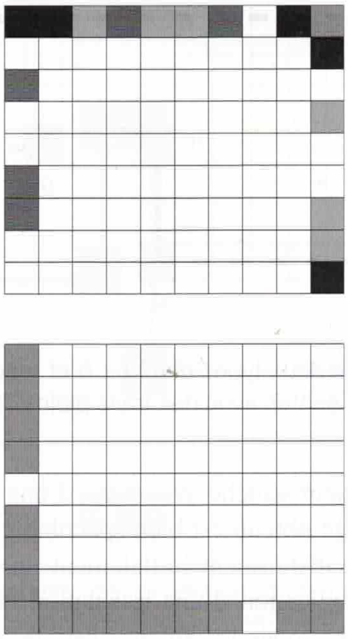

Figure 9. Application des projections (en haut et à gauche pour la composante gris foncé, en haut et à droite pour la composante gris clair), puis translation des cases grisées vers la première ligne et la première colonne.

IV Un exemple avec $m = 9$ et $n = 10$

Voir les figures 8 et 9.

V Remerciements

Nous remercions David Zmiaikou pour avoir posé ce problème et organisé le tournoi, ainsi que les représentants de l'association Animath (François Lo Jacomo et Martin Andler), Pierre Bornzstein pour sa démonstration du théorème de Mantel et nos *team leaders* Evgeniy Zorin et Trafim Lasy.

Les énoncés de tous les problèmes ainsi que les solutions proposées par les différentes équipes peuvent être consultés sur le site du tournoi www.itym.org.