ADDENDUM À “UNE GÉOMÉTRIE POUR LES GRAPHES D’AMITIÉ”

GABRIEL PALLIER

Ce texte complémente l’article *Une géométrie pour les graphes d’amitié*, paru dans *Quadrature* 99 (2016), 16-19. Les termes et notations non introduites ici sont celles de l’article.

J’indique ici un théorème de Baer permettant d’éviter la partie “algèbre linéaire” (Section 3) dans la preuve du théorème principal. Ce théorème qui ne m’était pas connu au moment de la rédaction est en fait déjà utilisé dans l’article original de Erdös, Renyi et Sós [3] et semble donc un ingrédient essentiel pour le théorème. Je dois aussi mentionner [4], qui soulignait déjà le lien avec des résultats non complètement élémentaires sur les plans projectifs finis et signale une preuve du théorème de l’amitié non publiée dûe à G.Higman.

Définition 1. *Une* polarité *d’un plan projectif* (Π, Δ) *est une bijection* $\varphi : \Pi \to \Delta$, *notée* $x \mapsto x^\star$ *(ainsi que son inverse), telle que*

$$\forall \pi, \pi' \in \Pi, \pi \in \pi'^\star \iff \pi' \in \pi^\star.$$

Étant donné une polarité C_φ, *son* cône isotrope *est* $C_\varphi = \{\pi \in \Pi : \pi \in \pi^\star\}$.

La terminologie est inspirée du cas linéaire : si k est de caractéristique non 2, les polarités de P^2k proviennent de formes quadratiques sur k^3 et le projectifié du cône isotrope est l’ensemble des points appartenant à leur polaire.

Théorème (Baer, 1946 [1])**.** *Soit* (Π, Δ) *un plan projectif fini régulier; on pose* n *tel que* $|\Pi| = n^2 - n + 1$. *Alors toute polarité admet au moins* n *points isotropes. En particulier, son cône isotrope est non vide.*

Dans le cas linéaire, la conclusion du théorème est assez connue : toute forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^3$, où q est puissance d’un nombre premier, possède une droite vectorielle isotrope. Ceci se démontre au moyen du lemme des tiroirs.

Le théorème principal de l’article suit directement du théorème de Baer en introduisant par l’absurde, à la fin de la Section 2 (avec les notations ayant court), la polarité de $\mathscr{P}$ qui à $v \in \mathscr{F}^{(0)}$ associe la sphère de rayon 1 dans $\mathscr{F}$ centrée en v.

Pour l’application au théorème de l’amitié on a seulement besoin que le cône isotrope soit non vide. Du côté de la théorie des plans projectifs finis, ceci est vrai sous des hypothèses un peu plus faibles.

Définition 2. *Une* corrélation *de* (Π, Δ) *est une bijection* $\psi \colon \Pi \cup \Delta \to \Delta \cup \Pi$ *telle que* $\varphi(\Pi) = \Delta$ *et*

$$\forall \pi, \pi' \in \Pi, \pi \in \psi(\pi') \iff \pi' \in \psi(\pi).$$

Dans ce contexte, $C_\psi = \{\pi \in \Pi : \pi \in \psi(\pi)\}$ *est appelé* ensemble des points absolus.

Date: February 5, 2023.

Les polarités correspondent aux corrélations involutives. Devillers, Parkinson et Van Maldeghem ont montré que dès que (Π, Δ) est fini et ψ est une corrélation, l'ensemble des points absolus de ψ est non-vide [2, Proposition 5.4].

Pour finir, il faut mentionner que le théorème de Baer (et le théorème de l'amitié) ne sont pas valables pour les plans projectifs (et graphes) infinis, même dans le cas linéaire. Par exemple, $P^2\mathbb{R}$ possède plusieurs polarités, notamment celle provenant de la forme quadratique $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; dans la représentation de $P^2\mathbb{R}$ comme bipoints de la sphère euclidienne, à chaque bipoint cette polarité associe un équateur équidistant de la sphère dont le cône isotrope est vide : le pôle Nord et le pôle Sud ne sont pas à l'équateur, jusqu'à preuve du contraire.

References

[1] R. Baer, Polarities in finite projective planes. *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 77–93.

[2] A. Devillers,J. Parkinson et H. Van Maldeghem, Hendrik Automorphisms and opposition in twin buildings. *J. Aust. Math. Soc.* 94 (2013), no. 2, 189–201.

[3] P. Erdős, A. Rényi et V.T. Sós, On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.* 1 (1966), 215–235.

[4] H.S. Wilf, The friendship theorem. *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Proc. Conf., Oxford, 1969) pp. 307–309 Academic Press, London.

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Mathematik, 76131 Karlsruhe, Germany

Email address: gabriel@pallier.org