Une géométrie pour les graphes d'amitié

Gabriel Pallier*

17 février 2015

Résumé

Dans ce court texte, on cherche à montrer comment les axiomes de la géométrie projective peuvent intervenir dans une démonstration originale du théorème de l'amitié. A chaque graphe d'amitié nous associons un plan projectif fini. Un résultat de classification partielle des plans projectifs permet alors de démontrer le théorème de l'amitié par exclusion de cas.

1 Le théorème de l'amitié

Démontré par Erdös, Renyi et Sós en 1966, le théorème de l'amitié fait partie des énoncés mathématiques qui peuvent se formuler dans le langage courant. Il énonce que :

« Si, dans un ensemble fini de personnes rassemblées dans une fête, toute paire de personnes possède exactement un ami en commun, alors il existe une personne (appelée hôte de la fête) qui est amie avec toutes les autres »

On peut souhaiter formaliser un peu ce théorème : l'amitié dans une fête est une relation binaire symétrique (mais nulle part réflexive) sur un ensemble de personnes P. On peut représenter une fête par un graphe régulier non orienté dont les sommets sont indicés par P, reliés par une arête s'ils sont amis. Il est alors possible de se convaincre de la validité du théorème en dessinant des petites fêtes, par exemple à 3, 5 ou 7 personnes :

Sous le prétexte de démontrer ce théorème, on se propose ici une rapide incursion dans plusieurs domaines des mathématiques : l'analyse combinatoire et la théorie des graphes sans surprise, mais également l'algèbre linéaire et ... la géométrie projective.

*gabriel@pallier.org

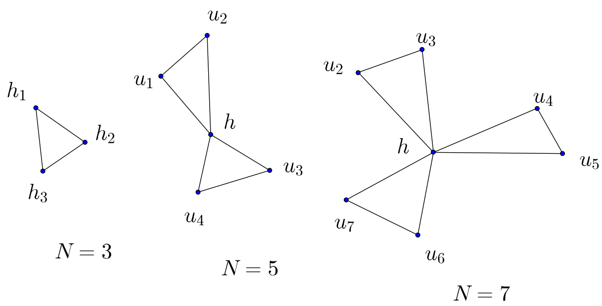

FIGURE 1.1 – Les uniques fêtes à 3, 5 ou 7 personnes vérifiant les hypothèses du théorème. On constate l'impossibilité de former une telle fête avec 2, 4 ou 6 personnes.

2 Plans projectifs

2.1 Définition ; dualité projective

Définition. Un plan projectif est la donnée d'un ensemble de points Π et d'un ensemble de droites Δ qui est une partie de $\mathcal{P}(\Pi)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(P1) Deux points distincts π et π' appartiennent à une seule et unique droite (notée $(\pi\pi')$)

(P2) Deux droites distinctes δ et δ' s'intersectent en un seul et unique point (noté $\delta \wedge \delta'$)

Les axiomes P1 et P2 constituent une idéalisation des relations d'incidence vérifiées par les points et les droites dans un plan affine, en supprimant l'exception des droites parallèles. Ainsi dans un plan projectif les points sont aux droites ni plus, ni moins que ce que les droites sont aux points. Une conséquence directe de cette symétrisation est qu'à chaque plan projectif $\mathscr{P} = (\Pi, \Delta)$ est naturellement associé un plan projectif dual $\mathscr{P}^\star = (\Pi^\star, \Delta^\star)$ tel que $\Pi^\star$ (resp. $\Delta^\star$) est un ensemble en bijection avec Δ (resp. avec Π) et

$$\delta^\star \in \pi^\star \text{ dans } \mathscr{P}^\star \iff \pi \in \delta \text{ dans } \mathscr{P}$$

.

L'exemple fondamental de plan projectif est le plan projectif algébrique sur l'anneau à division [1] k, noté $\mathbb{P}^2(k)$:

Exemple. Soit k un anneau à division ; on quotiente l'ensemble $k^3 \backslash \{0\}$ par la relation

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

L'ensemble obtenu est noté $\mathbb{P}^2(k)$; on note $[x : y : z]$ la classe de (x, y, z) et les droites de $\mathbb{P}^2(k)$ sont les ensembles d'équation

$$\delta_{[a:b:c]} = \{[x : y : z]\,,\ ax + by + cz = 0\} \quad (1)$$

Cette définition est compatible avec le quotient car $ax+by+cz$ est homogène de degré 1 en les variables x, y, z.

Le dual de $\mathbb{P}^2(k)$ est formé sur $\Pi^\star = \left\{\delta_{[a:b:c]} \mid [a : b : c] \in \mathbb{P}^2(k)\right\}$ et $\Delta^\star = \mathbb{P}^2(k)$. Si k est commutatif, $\mathbb{P}^2(k)$ est isomorphe à son dual [2], par exemple via l'application

$$[a : b : c] \longleftrightarrow \delta_{[a:b:c]}$$

2.2 Plans projectifs finis

Le résultat suivant montre que les plans projectifs finis peuvent se classifier en deux catégories :

Théorème. *Soit $\mathscr{P} = (\Pi, \Delta)$ un plan projectif fini ; alors on a l'alternative suivante :*
- Soit $\mathscr{P}$ est dégénéré, tout quadruplet de points de Π compte trois points alignés
- Soit $\mathscr{P}$ est régulier, ie il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que par tout point passent n droites, et toute droite possède n points, le nombre total de points (ou de droites) étant $n^2 - n + 1$.

1. Donc, un anneau (non nécessairement commutatif) dans lequel tout élément possède un inverse. Certains disent « corps gauche »
2. On peut voir ici l'autodualité de $\mathbb{P}^2(k)$ comme procédant de l'isomorphisme canonique (mais pas naturel) entre k^3 et son dual linéaire $(k^3)^\star$: $\delta_{[a:b:c]}$ est la projection dans $\mathbb{P}^2(k)$ de l'hyperplan $\ker\left\{ae_x^\star + be_y^\star + ce_z^\star\right\}$.

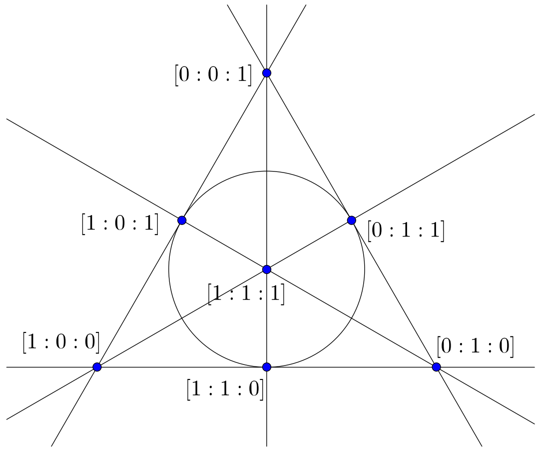

FIGURE 2.1 – Le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, aussi appelé plan de Fano, possède sept points et autant de droites. On a représenté six des sept droites par des droites. Où est la 7ème droite ?

Pour prouver ce théorème, donnons-nous $\mathscr{P}$ un plan projectif fini non dégénéré, et montrons qu'il est régulier. On procède en trois étapes.

(a) Toutes les droites passent par n points Soit $\delta \in \Delta$ et posons $n = |\delta|$ le nombre de points de δ. Pour toute $\delta' \in \Delta \backslash \{\delta\}$, on se donne $\sigma \in \Pi \backslash \{\delta \cup \delta'\}$ (un tel point existe, vu que $\mathscr{P}$ est non dégénéré) et on considère la bijection de δ sur δ' qui a tout $\pi \in \delta$ associe l'unique intersection des droites $(\sigma\pi)$ et δ'

(b) En tout point concourent n droites Soit $\rho \in \Pi$ un point et $\delta \in \Delta$ une droite ne passant pas par ρ. Il y a bijection entre les points de δ et les droites passant par ρ : à $\pi \in \delta$ on associe $(\rho\pi)$. L'injectivité est donnée par le premier axiome et la surjectivité par le second.

(c) Il y a $n^2 - n + 1$ points (et autant de droites) Soit $\tau \in \Pi$; on décompose $\Pi \backslash \{\tau\}$ en l'union des n droites épointées $\delta \backslash \{\tau\}$ pour toutes les δ passant par τ. Ceci donne

$$|\Pi \backslash \{\tau\}| = n\,(n - 1)$$

Ainsi, Π est de cardinal $n\,(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$. Par le même argument appliqué au dual $\mathscr{P}^\star$, $|\Delta| = n^2 - n + 1$.

Remarque 1. L'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ est régulier, avec $n = q + 1$, et [3] $q^2 + q + 1$ éléments.

2.3 Lien avec le théorème de l'amitié

Le lien avec le théorème de l'amitié réside dans l'observation suivante : si $\mathscr{F}$ est une fête vérifiant la condition d'amitié, on peut lui associer un unique plan projectif $\mathscr{P}$ tel que

- Les points de $\mathscr{P}$ sont les personnes de $\mathscr{F}$.
- Les droites de $\mathscr{P}$ sont les cercles d'amis de $\mathscr{F}$ (ie, les ensembles d'amis d'une même personne)

Vérifions que les deux axiomes de plan projectif sont réunies

(P1) : Deux personnes distinctes ont un ami unique en commun, et sont donc dans son cercle d'amis, soit dans une même et unique droite.

(P2) : Deux cercles d'amis s'intersectent en une unique personne.

Si l'on dessine les plans projectifs associés aux petites fêtes de la figure 1.1, on s'aperçoit qu'ils sont tous dégénérés :

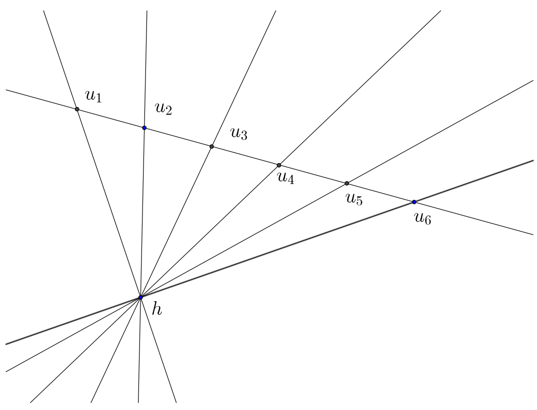

FIGURE 2.2 – Le plan projectif associé à l'unique fête à 7 personnes

Conformément au théorème de classification, il nous reste donc à montrer qu'il n'existe pas de fête possédant la propriété de l'unique ami en commun donnant un plan projectif régulier, et nous aurons démontré le théorème de l'amitié.

3. On voit dans cette somme transparaître une dissection de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ en 3 espaces affines de dimension 2, 1 et 0.

3 Un peu d'algèbre linéaire pour conclure

On démontre à présent le théorème en supposant par l'absurde qu'une fête vérifiant la condition d'amitié donne le second cas de l'alternative du théorème 2.2. Soit A la matrice d'incidence de $\mathscr{F}$; c'est une matrice de taille $N \times N$, où $P = \{p_1, \dots p_N\}$ est l'ensemble des personnes présentes à la fête, avec un 1 en position (i, j) si p_i et p_j sont amies, et 0 sinon. Sous les hypothèses du théorème de l'amitié, pour une fête donnant un plan projectif régulier, on vérifie que

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & n \end{pmatrix} = (n-1)\, I + U$$

Où n est tel que $N = n^2 - n + 1$, avec U la matrice pleine de 1. U est de rang 1 et admet $X =^t (1 \cdots 1)$ pour vecteur propre associé à la valeur propre N ; on complète X par une base du noyau de U ce qui donne $P^{-1}UP = \operatorname{diag}(N, 0, \dots 0)$ avec (par exemple)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

En conséquence, A^2 , puis vu que A est inversible, A, est diagonalisable [4], avec valeurs propres $\rho_1 = \pm\sqrt{N + n - 1} = \pm n$ (de multiplicité 1), $\sqrt{n-1}$ (de multiplicité r) et $-\sqrt{n-1}$ (de multiplicité s), les entiers r et s vérifiant $r + s = N - 1$. De plus, A est de trace nulle (elle est de diagonale nulle) donc $s \neq r$ et

$$\sqrt{n-1} = \frac{n}{|s-r|} \tag{2}$$

Ainsi, $\sqrt{n-1}$ est un rationnel.

Lemme. *Soit m un entier naturel. Alors*

$$\sqrt{m} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{m} \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Première preuve : d'après un théorème de Gauss, le polynôme $X^2 - m \in \mathbb{Z}[X]$

4. On pouvait aussi l'obtenir directement à l'aide du théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

étant primitif de degré $\geqslant 1$, il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ ssi il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Seconde preuve (sans Gauss) : supposons que $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ minimal tel que $n_0\sqrt{m} \in \mathbb{Z}$, on veut montrer $n_0 = 1$. Posons ℓ la partie entière de $\sqrt{m}$; écrivons $n_1 = n_0(\sqrt{m} - \ell)$. Alors $n_1\sqrt{m} = n_1 n_0 m - n_1 \ell n_0 \sqrt{m} \in \mathbb{Z}$; or $n_1 \leqslant n_0$ avec égalité ssi $\ell = \sqrt{m}$ autrement dit si $n_0 = 1$. □

Revenons à notre problème : on peut écrire $n - 1 = h^2$ avec $h \in \mathbb{N}^\star$. Mais alors d'après (2), h doit diviser $h^2 + 1$ ce qui est impossible sauf si $h = 1$. Ceci donne la solution $n = 2$, $N = 3$ triangle (toutes les personnes sont des hôtes) et achève la preuve du théorème.

4 Remarques et compléments

4.1 Sur le théorème de l'amitité

Signalons qu'il n'est pas nécessaire de recourir au langage des plans projectifs pour démontrer le théorème de l'amitié : on trouvera ainsi la preuve classique au chapitre 39 de [1] (dont nous reprenons ici l'essentiel des arguments pour la section 3), formulée exclusivement en termes de graphes et de matrice d'incidence. Puisque cependant un analogue du théorème 2.2 y est démontré, celui-ci nous a semblé valoir le détour. Le principe ici consiste à dédoubler la nature des objets en présence pour incorporer l'énoncé du théorème dans les axiomes (P1) et (P2) ; un peu de la même que l'on adopte, pour l'algèbre bilinéaire, le vocabulaire issu de la dualité.

Il existe une question naturelle dans le prolongement du théorème de l'amitié. On dit qu'un graphe est de ℓ-amitié si deux sommets quelconques sont toujours joints par un unique chemin [5] de longueur ℓ. Le théorème de l'amitié caractérise les graphes de 2-amitié. Au sujet des graphes de ℓ-amitié, Kotzig a avancé la

Conjecture. *Il n'existe aucun graphe de ℓ-amitié fini, pour $\ell \geqslant 3$.*

Cette conjecture est vérifiée pour $\ell \leqslant 30$; on pourra consulter [www1] pour un historique du sujet.

5. Un chemin est une suite d'arêtes adjacentes et ne repasse pas deux fois par le même sommet

Exercice. Vérifier la conjecture de Kotzig pour $\ell = 3$ (On pourra montrer que les éventuels graphes de 3-amitié sont des arbres, ie connexes et sans cycles, puis aboutir à une contradiction). Que peut-on en déduire pour ℓ multiple de 3 ?

4.2 Plans projectifs et structures algébriques

Nous avons vu dans la section 2 que les plans projectifs algébriques sur les anneaux à division forment bonne une famille de plans projectifs non dégénérés ; mais en existe-t-il d'autres ? Autrement dit, est-il possible d'algébriser un plan projectif non dégénéré défini de manière axiomatique ? La réponse est oui [3, 4], mais à condition [6] d'ajouter l'axiome de Desargues en plus des axiomes d'incidence :

(P3) (Desargues) Si les droites $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$, $(\alpha''\beta'')$ sont concourantes, alors les points $\gamma'' = (\alpha\alpha') \wedge (\beta\beta')$, $\gamma' = (\alpha\alpha'') \wedge (\beta\beta'')$ et $\gamma'' = (\alpha'\alpha'') \wedge (\beta'\beta'')$ sont alignés

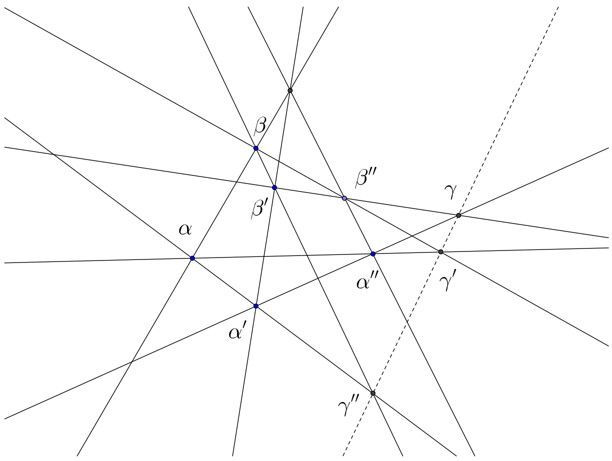

FIGURE 4.1 – La configuration correspondant à l'axiome de Desargues (ici dessiné dans le plan affine réel, il s'agit d'un théorème)

Un tel plan est dit arguésien. Par ailleurs $\mathscr{P}$ est algébrique sur un corps si et seulement s'il vérifie l'axiome de Pappus, à savoir [7]

6. On peut algébriser un plan projectif non dégénéré vérifiant seulement (P1) et (P2) mais cela donne la structure plus faible d'anneau ternaire, voir [4].

7. On a aussi la version duale

(P4) (Pappus) Si $\alpha, \alpha', \alpha''$ d'une part, β, β', β'' d'autre part, sont alignés, alors les points $(\alpha\beta') \wedge (\alpha'\beta)$, $(\alpha\beta'') \wedge (\alpha''\beta)$ et $(\alpha'\beta'') \wedge (\alpha''\beta')$ sont alignés.

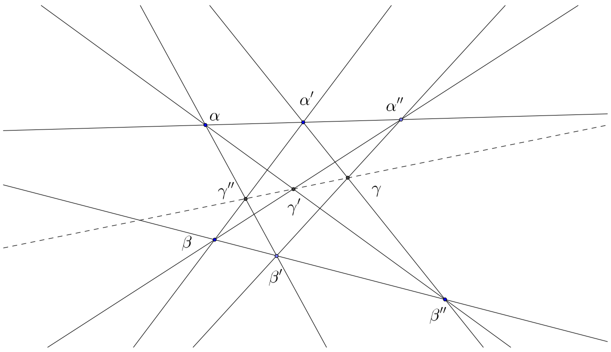

FIGURE 4.2 – La configuration de Pappus

L'axiome de Pappus est plus fort que celui de Desargues. Algébriquement, ceci se traduit par le fait qu'un corps est a fortiori un anneau à division ; cependant on peut aussi démontrer géométriquement que (P1), (P2) et (P4) impliquent (P3), ce qui constitue le théorème de Hessenberg. Dans le cas fini, (P3) et (P4) sont équivalents : c'est l'analogue du théorème de Wedderburn [8], mais on ne dispose pas de preuve géométrique satisfaisante [2]. Signalons pour finir que les plans projectifs finis non dégénérés qui ne sont pas arguésiens sont relativement mal connus en toutes généralité. Le plus petit (Velben-Wedderburn, 1907) est de cardinal 91. Il est donc de même cardinal, mais non isomorphe, à $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_9)$. L'inexistence pour l'ordre suivant a été établie en 1988 [www2] à l'aide de calculs par ordinateur.

Références

[1] Aigner, Ziegler, *Proofs from the Book*, (4ème edition), Springer ; 2006 (Chapitre 39)

[2] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1962 (Chapitre 2)

[3] M. Hall, *The Theory of Groups*, The Macmillan Company 1959 (Chapitre 20)

[4] B. Monjardet, *Géométries planes finies, Combinatoire et structures algébriques* in Mathématiques et Sciences humaines, tome 21 (1968), pp 39-51.

[www1] http ://www.math.illinois.edu/∼dwest/regs/kfriend.html

[www2] https ://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_libra 318.pdf

(P4') (Pappus dual) Si δ, ϵ, η d'une part, $\delta', \epsilon', \eta'$ d'autre part, sont concourantes, alors les droites $(\delta \wedge \epsilon', \delta' \wedge \epsilon)$, $(\delta \wedge \eta', \delta' \wedge \eta)$ et $(\epsilon \wedge \eta', \epsilon' \wedge \eta)$ sont concourantes.

8. Un anneau à division fini (et même, un anneau intègre fini) est un corps