REMPLISSAGE DANS LES GROUPES, GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE

GABRIEL PALLIER

Résumé. Attachés aux groupes, les invariants de remplissage homologiques constituent un raffinement quantitatif des propriétés de finitude en faisant intervenir le volume des chaînes. Au début des années 1990, Gromov et Thurston formulèrent des conjectures au sujet des invariants de remplissage de groupes arithmétiques, comme $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, affirmant que la géométrie d'un groupe ambiant, comme le groupe de Lie $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, se reflète dans ces invariants : le rang réel, ou total, du groupe ambiant marque le seuil d'une transition entre des régimes polynomiaux et (presque) exponentiels. Ce phénomène a été progressivement confirmé par Lubotzky-Mozes-Raghunathan, Leuzinger-Pittet, Druţu et Young notamment, aboutissant à une résolution des conjectures par Leuzinger-Young vers 2017. La polynomialité des invariants de remplissage aux degrés sous le seuil a plus récemment joué un rôle dans l'obtention d'annulations de la cohomologie de représentations unitaires par Bader-Sauer. Ces notes proposent une introduction à quelques-unes des méthodes géométriques et ergodiques de Leuzinger-Young et leurs prédécesseur·es, illustrées par des exemples.

Table des matières

1. Remplissage et courbure 2

2. Invariants et groupes 5

3. Méthodes 11
3.1. $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ et son arbre 11
3.2. Le cœur compact 13
3.3. Quelques mots sur les réseaux des espaces symétriques 13
3.4. $\mathbf{Q}$-rang petit et distorsion homologique des horosphères 19
3.5. $\mathbf{Q}$-rang élevé et abondance des plats logarithmiques 25

4. Usage par Bader et Sauer 27
4.1. Propriété (T) de Kazhdan 27
Remerciements 27

Date: 20 novembre 2026.

Key words and phrases. Espaces symétriques ; groupes arithmétiques ; propriétés de finitudes ; invariants de remplissage ; équidistribution .

Il s'agit des notes (non publiées) supportant l'exposé au séminaire Bourbaki du vendredi le 30 janvier 2026.

Références 27

1. Remplissage et courbure

Notre objectif dans cette première section est de définir les termes et le cadre géométrique dans lesquels les résultats de Leuzinger et Young s'expriment. On commence avec un résultat de jeunesse d'A. Weil, obtenu il y a tout juste un siècle, avant que son auteur ne se tourne vers la théorie des nombres.

Théorème 1.1 ([Wei26a])**.** *Soit* S *une surface riemannienne simplement connexe de courbure partout négative ou nulle. Alors,* S *admet l'inégalité isopérimétrique euclidienne : les courbes fermées de longueur v bordent des disque d'aire au plus $\frac{1}{4\pi}v^2$.*

En somme, plus la courbure est négative, meilleure est l'inégalité isopérimétrique. Par exemple, dans le plan hyperbolique de courbure -1, où la métrique peut s'écrire en coordonnées (ρ, θ) sous la forme

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 r d\theta^2,$$

on vérifie que le cercle de rayon r a pour circonférence $2\pi \sinh r \sim \pi e^r$ et le disque qu'il borde a pour aire $2\pi(\cosh r - 1) \sim \pi e^r$, qui est du même ordre ; il n'est pas très difficile de montrer que l'inégalité isopérimétrique suit un régime linéaire aux grandes échelles. Le théorème 1.1 est plus difficile car il autorise la courbure à varier tout en restant majorée par 0 et vaut à toutes les échelles.

Ce théorème est précurseur. Dans la version initiale il s'agit de remplir des lacets, mais l'énoncé admet un pendant homologique, dont voici une version moderne (nous expliquerons les termes juste après).

Théorème 1.2 (Gromov, Wenger [Gro87 ; Wen05])**.** *Soit* Y *un espace métrique* CAT(0) *simplement connexe de dimension topologique $n \geqslant 2$. Alors pour tout $d \in \{2, \dots, n\}$,*

$$\mathbf{FV}^d_{\mathrm{Y}}(v) \preccurlyeq \mathbf{FV}^d_{\mathbb{E}^n}(v) \approx v^{\frac{d}{d-1}}. \tag{1}$$

Le théorème 1.2 affirme que sous une hypothèse de courbure négative ou nulle, les cycles lipschitziens de Y ne sont pas plus difficiles à remplir par des chaînes lipschitziennes que ceux de même volume de l'espace euclidien, où la sphère d'aire v a un rayon de l'ordre de $r = v^{\frac{1}{d-1}}$ (à une constante multiplicative près) et est remplie par une boule dont le volume est de l'ordre de $r^d = v^{\frac{d}{d-1}}$. Il y a trois éléments à expliciter pour rendre ceci précis : la notion d'espace CAT(0), la définition du *volume de remplissage* $\mathbf{FV}$, et le sens des signes $\preccurlyeq$ et $\approx$ dans (1).

Définition 1.3. Soit Y un espace métrique ; on dit que Y est CAT(0) si

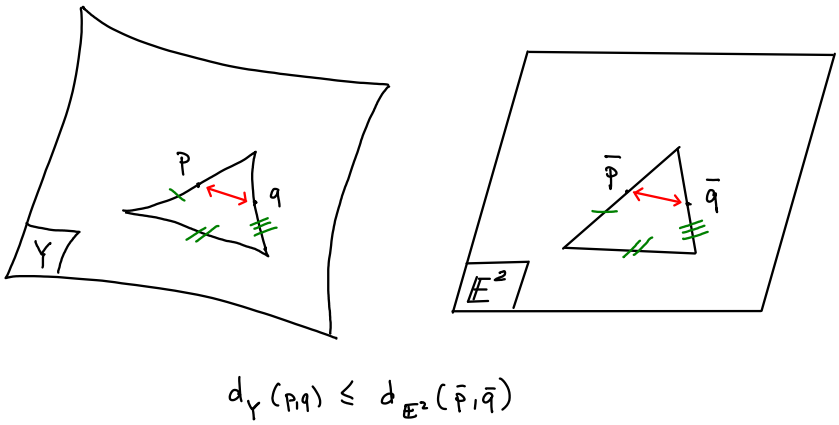


FIGURE 1 – L'inégalité CAT(0)

— Y est géodésique : pour toute paire de points de Y il existe une géodésique, c'est-à-dire un plongement isométrique d'un intervalle de $\mathbf{R}$ dans Y avec ces extrémités.
— Pour tout triangle géodésique tracé dans Y, et p et q deux points sur ce triangle, on a $d(p,q) \leqslant d_{\mathbb{E}^2}(\overline{p},\overline{q})$, où $\overline{p}$ et $\overline{q}$ sont deux points d'un triangle du plan euclidien ayant les mêmes longueurs de côtés.

Les espaces CAT(0) sont automatiquement contractiles, par un avatar moderne du théorème de Cartan-Hadamard [BH99]. Quand on pense aux espaces CAT(0), viennent à l'esprit :

— les variétés riemanniennes complètes simplement connexes de courbure majorée par 0, et notamment les espaces symétriques riemanniens de type non-compact ;
— les arbres, mais aussi et surtout les produits d'arbres, et les immeubles de Bruhat-Tits ;
— les complexes de Davis (pour les groupes de Coxeter) et de Salvetti (pour les groupes d'Artin) ;
— et bien plus encore.

La théorie géométrique des groupes contemporaine a vu émerger une profusion d'espaces et notamment de complexes cubiques CAT(0) qui ont joué un rôle important dans ses applications à la topologie géométrique.

Nous en venons maintenant à la fonction de remplissage **FV** d'un espace Y que nous supposerons toujours contractile, mais pas CAT(0) a priori. L'homologie d'un tel Y s'annule : il n'y a pas d'obstruction à remplir les cycles de dimension $d = 2, \ldots, n$ par des chaînes. Il est donc permis de les remplir, mais à quel coût ? Nous voulons quantifier ceci, avec une attention particulière pour les grands cycles.

Voici une formalisation couvrant [1] tous les espaces qui nous intéressent dans cet exposé.

Définition 1.4. Soit Y une variété riemannienne ou un complexe simplicial localement fini. On suppose Y contractile et, dans le second cas, on métrise Y au moyen de la plus petite distance géodésique qui rend tous les simplexes isométriques à des simplexes euclidiens de diamètre 1. On pose aussi $n = \dim Y$ et on suppose que c'est un entier naturel non-nul. Étant donné $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathrm{C}_k^{\mathrm{lip}}(Y, \mathbf{Z})$ le groupe des chaînes lipschitziennes singulières dans Y, i.e. les sommes formelles à coefficients entiers d'applications lipschitziennes du k-simplexe Δ^k vers Y. Pour tout $v \geqslant 0$, on pose

$$\mathbf{FV}_{\mathrm{Y}}^d(v) = \sup_{c \in \mathrm{C}_{d-1}^{\mathrm{lip}}(\mathrm{Y},\mathbf{Z}) : \partial c = 0, \mathrm{vol}_{d-1}(c) \leqslant v} \inf\{\mathrm{vol}_d r : r \in \mathrm{C}_d^{\mathrm{lip}}(\mathrm{Y}, \mathbf{Z}) : \partial r = c\}$$

qu'on appelle [2] *fonction (ou invariant) de remplissage homologique* de Y en degré d.

On ne s'intéresse à proprement parler qu'au type de croissance de $\mathbf{FV}_{\mathrm{Y}}^d$ quand v tend vers l'infini ; étant données deux fonctions réelles positives on écrira que $f \preccurlyeq g$ s'il existe $a > 0$ tel que $f(v) \leqslant ag(av) + av$ pour v assez grand, $f \approx g$ si $f \preccurlyeq g \preccurlyeq f$, et $f \prec g$ si $f \preccurlyeq g \not\preccurlyeq f$. Voici une échelle sommaire de types de croissances qui suffiront dans l'exposé : étant donnés α, β, γ avec $0 < \gamma < 1 < \alpha < \beta$ on a

$$1 \approx v \prec v^\alpha \prec v^\beta \prec e^{v^\gamma} \prec e^v.$$

On notera que cette échelle ne distingue pas entre eux les types de croissance situés entre « borné » et « linéaire », type de croissance que l'on désigne par $f(v) \approx v$. On dira de Y qu'il a ses invariants de remplissage euclidiens jusqu'au degré D si $\mathbf{FV}_{\mathrm{Y}}^d(v) \approx v^{\frac{d}{d-1}}$ pour $d = 2, \dots, \mathrm{D}$.

Les théorèmes 1.1 et 1.2 admettent des renforcements sous des hypothèses de courbure strictement négative. En particulier, les espaces hyperboliques réels, complexes, quaternioniens, et le plan hyperbolique de Cayley, ainsi que plus généralement les variétés riemanniennes simplement connexes de courbure majorée par -1 et les arbres simpliciaux de valence bornée ont des invariants de remplissage linéaires en tout degré.

1. Le théorème 1.2 est valable sous les hypothèses données ici pour une définition de **FV** plus technique en termes de courants entiers dans les espaces métriques, dont la théorie est développée dans [AK00] et qui est nécessaire en général mais qu'on passera sous silence ici.

2. La quantité est finie sous quelques conditions techniques qui seront toujours vérifiées dans la suite. Dans le cas simplicial, on pourra noter qu'on s'est quelque peu compliqué la tâche : on imagine sans mal une définition analogue remplaçant $\mathrm{C}_\bullet^{\mathrm{lip}}$ par le complexe des chaînes simpliciales, et où l'on dénombre les simplexes plutôt que de mesurer des volumes. Cette construction donnerait un résultat équivalent dans les cas qui vont nous intéresser au §2, c'est-à-dire quand un groupe agira sur Y de manière appropriée ; toutefois les raisons pour cela sont hautement non-triviales et font appel à la théorie géométrique de la mesure [FF60]. Modulo ces considérations, la définition 1.4 a le mérite de permettre un traitement uniforme.

L'emploi de la terminologie d'invariant concernant $\mathbf{FV}_{\mathrm{Y}}$ peut surprendre. À ce stade il peut se motiver comme suit. Dans la Définition 1.4 on a construit ces fonctions en raffinant une information, l'annulation de groupes d'homologie $H_d(\mathrm{Y}, \mathbf{Z})$. Ces annulations sont des invariants topologiques. Dire que $\mathbf{FV}$ n'est pas trop grande, c'est quantifier et concrétiser cette annulation (nous renvoyons aux exposés [Mes19 ; Pan25] sur des idées voisines du côté de l'homotopie). On aime continuer à penser aux fonctions de remplissage comme à des invariants topologiques, tout en gardant à l'esprit que ce sont là des invariants d'aspect quantitatif, encodant une information à grande échelle. Il est possible de préciser ce qu'on entend par là au moyen de la notion de type de quasiisométrie, qui est une réminiscence à grande échelle de la notion de type d'homotopie.

2. Invariants et groupes

L'intervention des fonctions de remplissage en théorie des groupes est ancienne. M. Dehn a observé dès 1911 que le problème du mot dans certains groupes d'isométries du plan hyperbolique réel admet une solution de complexité linéaire, c'est-à-dire qu'après s'être donné une présentation finie de ces groupes, nous pouvons toujours réécrire un mot de longueur v dans l'alphabet des générateurs représentant l'élément neutre du groupe comme un produit de conjugués de relateurs en nombre proportionnel à v [Deh11]. En langage moderne, la fonction dite de Dehn mesure cette complexité ; elle se trouve être équivalente à une variante homotopique de la fonction de remplissage $\mathbf{FV}^2_{\mathrm{Y}}$, pour des espaces associés au groupe de manière appropriée [Bri02]. Reformulée de la sorte, l'observation de Dehn est, en substance, que les groupes qu'il considérait ont la même inégalité isopérimétrique que les arbres et le plan hyperbolique. Cette connexion a joué un rôle historique en permettant à Gromov (parmi d'autres observations) de dégager la classe des groupes hyperboliques [Gro87].

Soit Γ un groupe discret, et Y tel qu'au §1. On suppose que Γ agit sur Y de manière *géométrique*, c'est-à-dire que

(i) Γ agit par isométries, simpliciales si Y a une structure simpliciale.

(ii) pour tout $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{Y}$ compact, $\{\gamma \in \Gamma : \gamma\mathrm{K} \cap \mathrm{K} \neq \varnothing\}$ est fini.

(iii) $\Gamma\backslash X$ est compact.

On n'a pas supposé a priori que l'action de Γ sur Y est libre, mais il est vital de garder à l'esprit que les propriétés (i), (ii) et (iii) attribuent à Γ opérant sur Y des caractéristiques communes à celle du groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{K})$ d'un complexe cellulaire asphérique de n-squelette fini K, agissant sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{K}}$. Cette dernière situation confère à Γ la propriété dite *de finitude* $\mathcal{F}_n$. Les propriétés $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont des traductions plus familières, elles correspondent à être de type fini et de présentation finie respectivement. Nous renvoyons à l'exposé récent [Gui25] au sujet des propriétés de finitude.

Définition 2.1. Sous les hypothèses (i), (ii) et (iii) ci-dessus, et pour tout $d \in \{2, \dots, n\}$, on définit $\mathbf{FV}^d_\Gamma := \mathbf{FV}^d_Y$ (qui ne dépend pas de Y).

En grossissant quelque peu le trait, majorer les invariants de remplissage $\mathbf{FV}^d_\Gamma$ d'un groupe Γ pour $d \in \{2, \dots, n\}$, c'est fournir un raffinement quantitatif de l'énoncé « Γ possède la propriété de finitude d'ordre n ». Cet énoncé est suffisamment imprécis pour ne pas être incorrect ; toutefois, il existe en réalité plusieurs propriétés de finitude d'ordre n qui ne sont pas tout à fait équivalentes, et vu que la Définition 1.4 des invariants de remplissage est de nature homologique, il est plus sensé a priori de les rapprocher de la propriété de finitude [3] FH_n, qui demande à Γ d'avoir un classifiant K de n-squelette fini tel que $H_i(\widetilde{\mathrm{K}}, \mathbf{Z})$ s'annule pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Malgré tout, mis à part les degrés $d \in \{2, 3\}$ qui recèlent quelques subtilités, les invariants de remplissage homologiques des groupes en degré d coincident avec les invariants de remplissage homotopiques généralisant la fonction de Dehn [Abr+13, p.19206], donc cette distinction n'a *de facto* pas lieu d'être en grand degré.

Exemple 2.2. Le groupe abélien libre $\Gamma = \mathbf{Z}^n$ opère géométriquement (et librement) sur l'espace euclidien de dimension n via la donnée d'un réseau ; il s'ensuit qu'il a des invariants de remplissage euclidiens en tout degré. C'est encore le cas d'un groupe cristallographique, qui agit géométriquement sur $\mathbb{E}^n$, et en fait de tout groupe virtuellement [4] abélien, c'est-à-dire possédant un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbf{Z}^n$.

Exemple 2.3. Considérons le groupe vraiment libre $\Gamma = \mathrm{F}_m$ sur m générateurs (avec $m \geqslant 2$), dont on note l'ensemble S. Comme $\mathbf{Z}^n$, ce groupe est de type $\mathcal{F}$. Le groupe Γ opère sur le graphe simplicial $\mathcal{C}$ dont l'ensemble des sommets est une copie de Γ, deux sommets x et y étant reliés par une arête si $y = xs^{\pm 1}$ pour un élément s de S. Cette action est libre et transitive sur les sommets. Elle est isométrique pour la distance simpliciale. On vérifie que $\mathcal{C}$ est un arbre ; s'il possédait un cycle, celui-ci correspondrait à une relation non triviale de Γ, contredisant la liberté de ce dernier. Les invariants de remplissage de Γ sont linéaires en tout degré.

A l'exemple 2.2 on a employé pour la première fois le mot *virtuel*. Plus généralement, on dit que les groupes discrets Γ_1 et Γ_2 sont virtuellement isomorphes s'il existe $\Lambda_1 < \Gamma_1$ et $\Lambda_2 < \Gamma_2$ d'indices finis et un isomorphisme entre Λ_1 et Λ_2. Les propriétés de finitude topologiques et algébriques sont des invariants virtuels des groupes [Bro82, p. VIII.11]. Les fonctions de remplissage $\mathbf{FV}$ sont encore (à $\approx$ près) invariantes par isomorphisme virtuel. Pour les géomètres des groupes, ceci relève du principe évoqué à la fin du §1, et qui se précise, à la suite de Gromov

3. A ne pas confondre avec la propriété FH de Serre, aussi notée (FH) à cause de la propriété (T) à laquelle elle est intimement liée.

4. C'est un anglicisme. L'adjectif virtuel est à entendre au sens de l'anglais virtually, qui signifie dans ce contexte « presque ». Il n'a pas cette signification en français courant.

[Gro93], de la manière suivante : les groupes de type fini Γ et Λ ont le même type de quasiisométrie s'ils admettent des actions qui commutent, par homéomorphismes, sur un même espace topologique localement compact X avec les propriétés [5] (ii) et (iii). Les fonctions de remplissages sont invariantes par quasiisométrie parmi les groupes de type $\mathcal{F}_n$ [AWP99 ; You11].

Voici maintenant le résultat central de notre exposé, que nous spécialisons aux groupes $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ pour $n \geqslant 2$. Le cas général découle des travaux de Leuzinger-Young [LY21]. Il s'agit de la culmination de trois décennies d'efforts graduels. Ces groupes ont la propriété de finitude $\mathcal{F}_\infty$ et leurs invariants de remplissage homologiques sont bien définis pour tout $d \geqslant 2$.

Théorème 2.4 (Leuzinger & Young, [LY21])**.** *Soient n et d des entiers naturels, $n, d \geqslant 2$. Alors*

$$\mathbf{FV}^d_{\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})}(v) \begin{cases} \approx v^{\frac{d}{d-1}} & d < n-1 \\ \geqslant e^{v^{\frac{1}{n-1}}} & d = n-1 \end{cases}$$

En particulier, pour $n \geqslant 4$ les fonctions de remplissage homologiques de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ sont euclidiennes jusqu'au degré $n-2$.

Ce théorème implique la conjecture de Thurston affirmant que la fonction de Dehn de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ doit être quadratique pour $n \geqslant 4$.

Remarque 2.5. Dans le cas $d = n-1$, Leuzinger et Pittet ont conjecturé que la fonction de remplissage est exactement exponentielle ; cela n'est à l'heure actuelle confirmé que pour $n = 3$ [Eps+92 ; LP96].

Remarque 2.6. Soit A un anneau. Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathrm{A})$ n'a pas, en général, d'aussi bonnes propriétés de finitude que $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$. Par exemple Nagao a observé en 1959 que le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}[t])$ n'est pas finiment engendré, puis Krstić-McCool ont montré en 1999 que $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z}[t])$ (qui est finiment engendré) n'est pas finiment présenté [Nag59 ; KM99]. Enfin, Bux-Mohammadi-Wortman 2007 ont montré que $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}[t])$ n'est pas de type $\mathrm{FP}_{n-1}(\mathbf{Q})$ (une variante de la propriété $\mathcal{F}_{n-1}$, dont elle découle) [BMW10], et Bux-Wortman ont montré que $\mathrm{SL}(n, \mathbf{F}_q[[t]])$ n'est pas de type $\mathrm{FP}_{n-1}(\mathbf{Q})$. On peut interpréter la difficulté, conjecturellement exponentielle, de remplissage au degré $n-1$ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ comme un écho atténué de ces « pathologies ». C'est peut-être ce dernier résultat qui a fait dire à Bux et Wortman dans [BW07], alors que des ancêtres du théorème de Leuzinger-Young étaient déjà connus, que

5. En remplaçant, dans la définition de quasiisométrie, (ii) par la liberté et (iii) par la transitivité, qui sont des propriétés plus fortes, et en ignorant la topologie, on récupère la notion bien connue d'isomorphisme de groupe (mais vue comme une *relation*). Ceci met en évidence que la quasiisométrie est, pour les groupes discrets, un relâchement de la relation d'isomorphisme ; il s'agit d'un relâchement plus permissif que la relation d'isomorphisme virtuel.

n	$\mathbf{FV}^2_{\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})}(v)$	référence	
2	v	voir §3.1	
3	e^v	[Eps+92]	
4	v^2	[LY21]	} Conjecturé par
$\geqslant 5$	v^2	[You13]	} Thurston [Ger93]

TABLE 1 – La fonction de Dehn de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$.

> « le contraste entre les groupes arithmétiques sur les corps de fonctions [comme $\mathrm{SL}(n,\mathbf{F}_q[[t]])$] et les groupes arithmétiques sur les corps de nombres [comme $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$] s'atténue quand l'on considère un analogue métrique [les fonctions de remplissage] de la longueur de finitude [i.e. le plus grand k tel que $\mathcal{F}_k$ ou ses variantes sont présentes] ».

Le théorème 2.4 fait partie d'un phénomène plus général qu'on va aborder maintenant, ayant des prolongements conjecturaux ; des progrès partiels vers le théorème 2.4 ont en fait été obtenus en résolvant des cas qui relèvent du théorème 2.7 ci-dessous. La lecture des énoncés suivants demande plus de connaissances préalables sur les groupes algébriques et arithmétiques que le reste de ce texte ; certains des termes, notamment ceux de *rang* (rationnel et réel) et de *réseau non-uniforme*, seront définis au §3.3 ; quant aux *groupes arithmétiques* (sur les corps de nombres), ils sont obtenus par des constructions telles que celle qui donne $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ et ce sont des réseaux dans des groupes comme $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$. Nous renvoyons à l'ouvrage [Mor15] et aux notes de cours [Ben09] pour des présentations accessibles de ces notions.

Théorème 2.7 (Leuzinger & Young [LY21])**.** *Soit* G *un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple défini sur* $\mathbf{Q}$, $\Gamma = \mathrm{G}(\mathbf{Z})$, *et* r *le rang réel de* $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. *On suppose que* Γ *est non-uniforme dans* $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. *Alors pour tout* $d \in \{2,\dots,r-1\}$, *on a que*

$$\mathbf{FV}^d_\Gamma(v) \approx v^{\frac{d}{d-1}}, \tag{2}$$

i.e., le remplissage de Γ *est euclidien dans tous les degrés strictement sous le rang. De plus,*

$$\mathbf{FV}^r_\Gamma(v) \geqslant e^{v^{\frac{1}{r-1}}}, \text{ et si } r=2, \text{ alors } \mathbf{FV}^r_\Gamma(v) \approx e^v. \tag{3}$$

Il est équivalent de supposer que Γ est un réseau non-uniforme irréductible d'un groupe de Lie semi-simple de rang $r \geqslant 2$ et de centre fini d'après le théorème d'arithméticité de Margulis. À l'encontre peut-être du goût des géomètres différentiel·les, on a pris le parti dans ce texte de ne pas formuler les théorèmes du point de vue des groupes de Lie, premièrement pour économiser l'exposition, ensuite car on constate que, si les théorèmes 2.4 et 2.7 ont bien des cousins du côté de la géométrie des espaces symétriques d'une part (voir §3.4) et du côté des groupes arithmétiques plus généraux (Remarque 2.10 ci-dessous) d'autre part, ils

ne se généralisent pas très naturellement du côté des réseaux des groupes de Lie semi-simples de centre non fini.

Le théorème 2.7 était conjecturé par Gromov [Gro93]. L'énoncé est non-vide seulement pour $r \geqslant 2$ (et même $r \geqslant 3$ pour la partie de la conclusion exprimée par (2)). Certains cas du théorème étaient déjà connus avant Leuzinger-Young, voici un historique sommaire :

(i) Leuzinger et Pittet [LP96] ont établi la première partie de (3) quand $d = r = 2$, généralisant le résultat de [Eps+92] mentionné dans la remarque 2.5. Gromov [Gro93] a montré par ailleurs que l'inégalité $\mathbf{FV}^d_\Gamma(v) \preccurlyeq e^v$ a lieu pour tout Γ comme dans le théorème. Ce deux résultats combinés donnent la deuxième partie de (3) toujours quand $r = 2$.

(ii) Druţu [Dru04] a établi que $\mathbf{FV}^2_\Gamma(v) \preccurlyeq v^{2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ quand Γ est de $\mathbf{Q}$-rang un et $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ de rang réel au moins 3. A peu près simultanément, Leuzinger-Pittet ont montré la borne légèrement meilleure $\mathbf{FV}^2_\Gamma(v) \preccurlyeq v^2$ dans certains cas recouvrant en partie ceux de Druţu, notamment quand $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)$ où K est un corps de nombres totalement réel de degré au moins 3 [LP04, Corollary 2.2].

(iii) Young [You13] a montré que la fonction de Dehn de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ est quadratique pour $n \geqslant 5$. Ce cas est en quelque sorte orthogonal à celui de Druţu et Leuzinger-Pittet, car le $\mathbf{Q}$-rang de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ est égal à $n - 1$ qui est le plus grand possible (voir §3.3).

(iv) Leuzinger-Young ont obtenu en 2015 le théorème pour Γ de $\mathbf{Q}$-rang un, étendant et renforçant les résultats mentionnés en (ii) [LY17].

(v) Cohen a montré que $\Gamma = \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z})$ a une fonction de Dehn (et donc $\mathbf{FV}^2$ aussi) quadratique pour $n \geqslant 5$ [Coh17] en adaptant la méthode de Young.

Remarque 2.8. Bien que le cas où $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ est de rang réel un (et où l'arithméticité des réseaux fait parfois défaut) et celui des réseaux uniformes ne relèvent pas du théorème 2.7, et ne sert pas aux résultats d'annulation en cohomologie unitaire (voir toutefois [LP25, section 5], à mettre à jour, ainsi que la remarque sous le théorème 5 de la dernière version de [BS26]) une partie des méthodes est commune. Nous donnons un panorama sur la figure 2. Quelques cas de rang un restent ouverts à l'heure actuelle.

Remarque 2.9. Dans la définition 1.4 et dans les énoncés des théorèmes on a pris les coefficients dans $\mathbf{Z}$. Il est possible de définir les invariants de remplissage $\mathbf{FV}$ en prenant les coefficients dans un anneau normé R. Le résultat peut parfois être différent, même avec $R = \mathbf{Q}$ et des sous-groupes de groupes CAT(0) [LM22]. L'invariance par quasiisométrie dans la classe des groupes $\mathrm{FH}_n(R)$ ou $\mathrm{FP}_n(R)$ (et sous une légère condition additionnelle dans ce dernier cas) est encore valable d'après des résultats très récents de Bader-Kropholler-Vankov et Weis respectivement [BKV25 ; Wei26b].

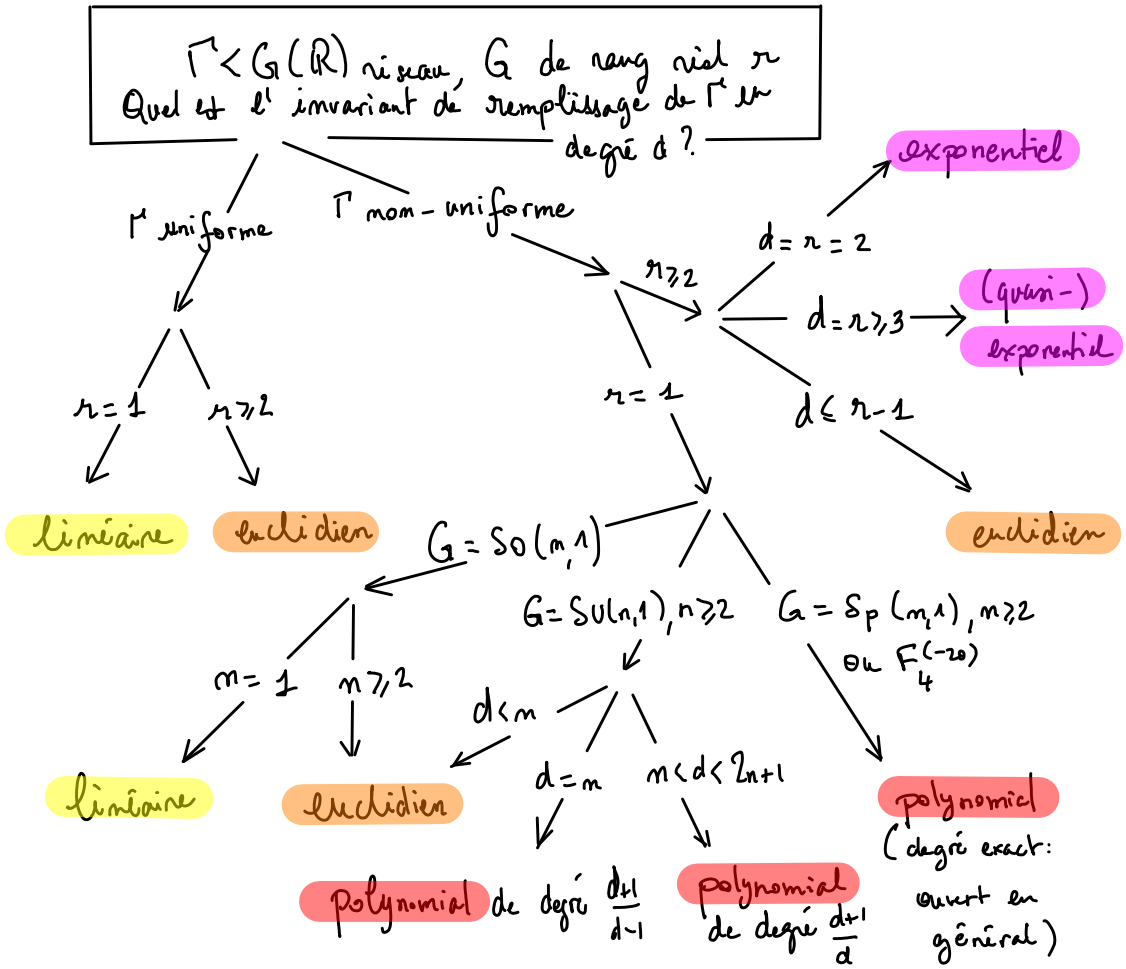


FIGURE 2 – Invariants de remplissage dans les réseaux irréductibles de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. Le théorème 2.7 de Leuzinger-Young correspond à la branche où Γ est non-uniforme et $r \geqslant 2$. Le cas $\mathrm{G}(\mathbf{R}) = \mathrm{SU}(n,1)$, Γ non uniforme est dû à Young (bien qu'il ne l'énonce pas), via sa détermination des invariants de remplissage dans les groupes de Heisenberg réels [You16]. Dans le cas $\mathrm{G}(\mathbf{R}) = \mathrm{Sp}(n,1)$ et $F_4^{(-20)}$ on dispose d'encadrements polynomiaux, mais ceux-ci ne donnent pas les fonctions de remplissage exactes en général (toutefois elles suffisent pour les applications aux annulations en cohomologie unitaire, [LP25]). On trouve des énoncés conjecturaux pour l'estimation exacte de ces fonctions vers la fin de [Gro93, 5.D.(5)(f)].

Remarque 2.10. On a évoqué les groupes arithmétiques sur les corps de nombres et (très brièvement) sur les corps de fonctions. Dans la classe des groupes S-arithmétiques (qui englobe celle des groupes arithmétiques sur les corps de nombres mais pas sur les corps de fonction), une généralisation des théorèmes 2.4 et 2.7 a été conjecturée par Bux-Wortman [BW07, Conjecture 1.5 et Question 1.6]. Elle fait l'objet de recherches actuelles (voir l'annonce dans [BS26, p. 3.3]).

3. Méthodes

> « Voici mon secret. Il est très simple : on ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux. »

La suite de ce survol est essentiellement dédiée à l'évocation de quelques méthodes de preuve des théorèmes 2.4 et 2.7 et des cas particuliers de ce dernier, notre but étant de permettre d'apprécier les difficultés essentielles dans les différentes approches. On commence par discuter du cas $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, qui est spécial au point qu'il ne relève même pas de l'énoncé général, mais permet déjà de dégager le rôle joué par un objet appelé *cœur compact* (ou partie épaisse) d'un réseau non-uniforme dans un espace symétrique. On met ensuite en évidence l'équivalence du problème de remplissage dans les réseaux avec un problème de géométrie des horosphères dans les espaces symétriques riemanniens. Quand le $\mathbf{Q}$-rang est égal à un, ce problème revient précisément à comprendre la distorsion homologique des horosphères bordant le cœur compact. En $\mathbf{Q}$-rang supérieur (ce qui est le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ pour $n \geqslant 3$), c'est plus compliqué, et il faut travailler (au moins pour $d \geqslant 3$) avec les *plats* de l'espace symétrique qui peuvent parfois (souvent, en fait) être transverses aux horosphères. Leuzinger et Young font appel à un ingrédient de nature dynamique, le théorème de Kleinbock-Margulis [KM98], qui leur permet de s'assurer que, bien que certains plats s'échappent du cœur compact, les plats génériques ne s'en éloignent pas trop souvent.

3.1. $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ **et son arbre.** Les adeptes de la théorie de Bass-Serre savent que le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ se scinde en *amalgame* :

$$\Gamma = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}).$$

Le sous-groupe dérivé, qui est le noyau du morphisme de Γ vers

$$\Gamma^{\mathrm{ab}} = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z})/\langle(\overline{2},-\overline{3})\rangle,$$

est d'indice fini $(4\times 6)/2 = 12$ d'une part, libre d'autre part, car il agit librement sur l'arbre de Bass-Serre correspondant à l'amalgame [Ser77]. Le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ est donc virtuellement libre. Via l'exemple 2.3 ceci entraîne que ses invariants de remplissages sont linéaires en tous degrés.

Nous tenons là le résultat, mais il reste à dire sur son interprétation géométrique ; nous espérons aussi par là convaincre au-delà des adeptes de la théorie de Bass-Serre.

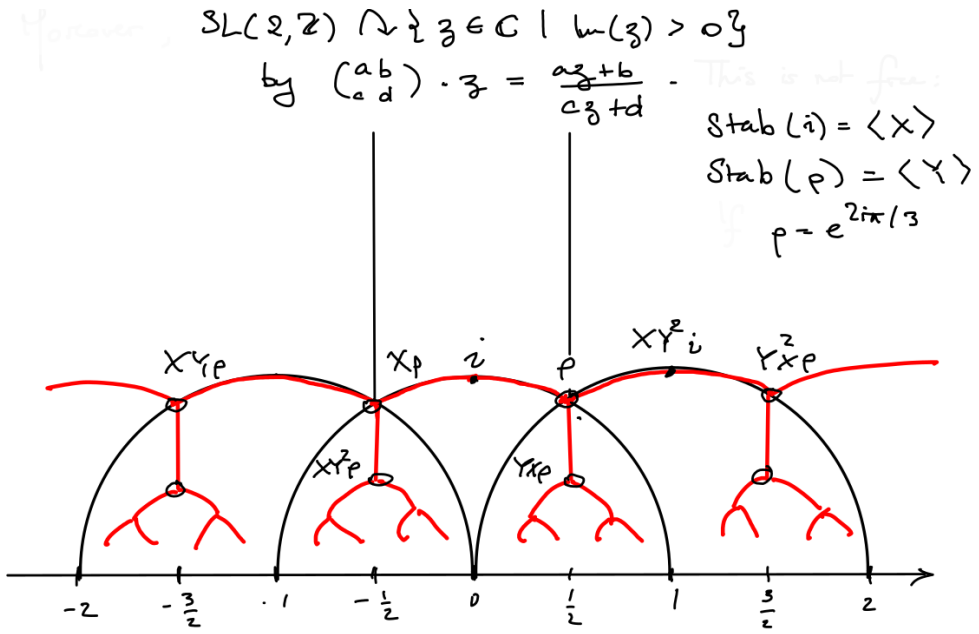


FIGURE 3 – L'arbre de Bass-Serre de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ (en rouge).

Le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ s'identifie naturellement à un sous-groupe d'isométries du *plan hyperbolique* via son inclusion dans $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$; rappelons en effet que ce dernier opère par homographies, qui sont des transformations de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

sur le demi-plan supérieur, en préservant la métrique hyperbolique

$$ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(\Im z)^2}. \tag{4}$$

Un domaine fondamental pour cette action a pour adhérence $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geqslant 1 : \ -\frac{1}{2} \leqslant \Re z \leqslant \frac{1}{2}\}$. Nous illustrons d'abord, sur la figure 3, l'arbre de Bass-Serre, qui apparaît superposé à l'image peut-être plus familière du domaine fondamental $\mathcal{D}$ et de ses translatés sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. Ici, avec les notations de la figure,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

un calcul donne que

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'une part, et un raisonnement qui se fonde essentiellement sur l'algorithme d'Euclide montre que X et Y engendrent $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ d'autre part (voir par exemple [Ser73, Chapitre 7]).

L'orbite de i est figurée par des cercles noirs, celle de $\rho = e^{i\pi/3}$ par des cercles vides. L'arbre (de Bass-Serre) de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ qui relie ces points apparaît en rouge.

3.2. **Le cœur compact.** Sur la figure 3 on observe que l'arbre de Bass-Serre de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ évite certaines régions du plan hyperbolique, par exemple il ne monte pas au-dessus de certaines partie imaginaires. Ces régions sont appelées *horodisques*. On a dessiné ces régions en bleu sur la figure 4 où nous adoptons cette fois-ci le modèle du disque [6] pour le plan hyperbolique ; dans ce modèle, il s'agit de disques tangents au bord du plan hyperbolique [7]. On constate que l'orbite de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ se répartit bien dans le complémentaire des horodisques, et pour cause : nous allons voir que $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ agit géométriquement sur cette région.

Afin de l'expliquer, convoquons le quotient $\mathcal{M} = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\backslash\mathbb{H}^2$, appelé courbe modulaire. L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ n'étant pas libre, il s'agit à proprement parler d'un orbi-espace : $\mathcal{M}$ possède deux points singuliers, qui correspondent aux projections de i et de ρ. Par ailleurs $\mathcal{M}$ n'est pas compacte. L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur le plan hyperbolique tout entier n'est de ce fait pas géométrique au sens que nous avons donné au §2. Toutefois, pour h assez grand, l'espace $\mathcal{M}_{\leqslant h}$ obtenu à partir de $\mathcal{M}$ privée du voisinage de la pointe formé par $\{\pi(z)\colon \Im z > h\}$ est compact, et Γ opère co-compactement et proprement discontinûement par isométries sur le revêtement universel de $\mathcal{M}_{\leqslant h}$. Il s'agit de l'espace recherché, que nous appelerons coeur compact (étant entendu qu'il n'est pas compact, mais qu'il s'agit du relèvement d'un espace compact) et noterons X_0.

Faisons un bilan partiel : pour comprendre le remplissage dans le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, nous avons trouvé un espace sur lequel il agit géométriquement (ici le complémentaire d'une famille d'horodisques dans le plan hyperbolique). Cet espace n'est pas un arbre, mais il contient un arbre qui représente bien sa géométrie à grande échelle, au sens où on peut se donner existe une collection de boules fermées (B_i) centrées sur les sommets de l'arbre, qui recouvrent le coeur compact, et telles que

(ii) les boules B_i ne se chevauchent pas trop : chaque point est contenu dans un nombre fini d'entre elles

(iii) leur rayon est uniformément borné.

En général, la géométrie à grande échelle de X_0 sera trop compliquée pour être résumée par un arbre. Malgré tout le cœur compact (et quelques très légères variantes) restera notre modèle géométrique privilégié.

3.3. **Quelques mots sur les réseaux des espaces symétriques.** Nous aurons besoin de quelques notions concernant les réseaux des espaces symétriques et les liens que ceux-ci entretiennent avec l'arithméticité ; étant donné que ce sont surtout

6. Ces changements de modèle ne doivent pas faire perdre de vue qu'il s'agit toujours du même objet.

7. De manière peut-être étrange, on appelle ces points de tangence *centres* des horodisques. Ce sont effectivement les points-limites des centres des « vrais » disques du plan hyperbolique qui convergent vers les horodisques.

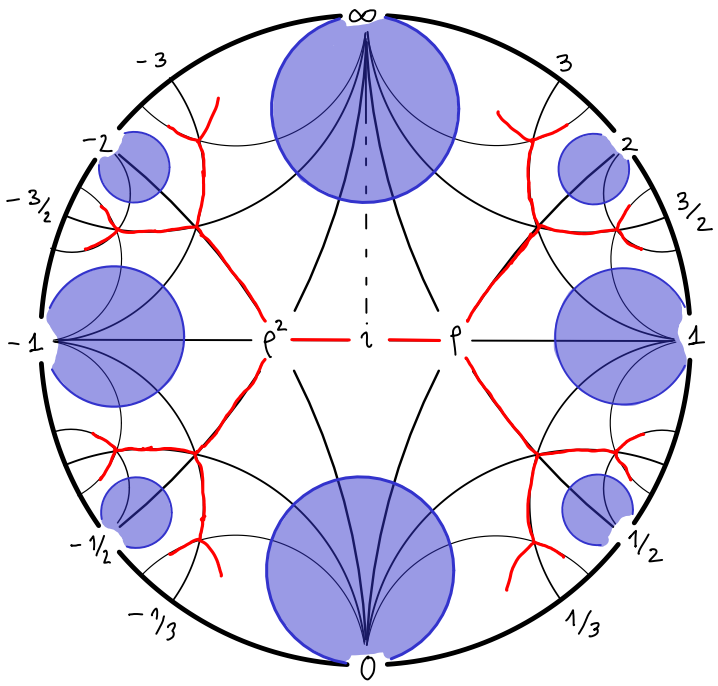


FIGURE 4 – L'arbre de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ (en rouge) évite la réunion d'une famille d'horodisques (en bleu) centrés aux points rationnels du cercle à l'infini (la droite projective réelle). Ces horodisques sont des translatés d'un seul horodisque centré au point ∞ ; leur complémentaire est le coeur compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$.

les conséquences géométriques et dynamiques qui nous concernent dans cet exposé, et pour ne pas surcharger le présent texte, nous serons très rapides, mais renvoyons à [Mor15] déjà cité pour une exposition détaillée des groupes arithmétiques sur les corps de nombres et [Ebe96] pour la géométrie des espaces symétriques de type non-compact. Les expert · es pourront se passer de nos rappels sans risque.

Un point commun entre les espaces $\mathbb{E}^n$ et $\mathbb{H}^2$ intervenant dans les exemples 2.2 et aux §§3.1-3.2 respectivement est qu'il s'agit d'*espaces symétriques riemanniens*. Les groupes $\mathbf{Z}^n$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ sont des réseaux dans ces espaces symétriques. É. Cartan a compris que la classification des espaces symétriques (sans facteurs euclidiens) était équivalente à celle des groupes de Lie semi-simples réels à isomorphisme local près. Une façon pratique[8] de construire de tels groupes est de procéder de

8. On enseigne en M1 (et à raison) que tous les groupes de Lie ne sont pas des groupes de matrices réelles. Toutefois, il est utile de *ne pas y penser* ici, car les groupes de Lie qui ne sont pas des groupes de matrices sont pathologiques du point de vue des théorèmes de remplissage comme

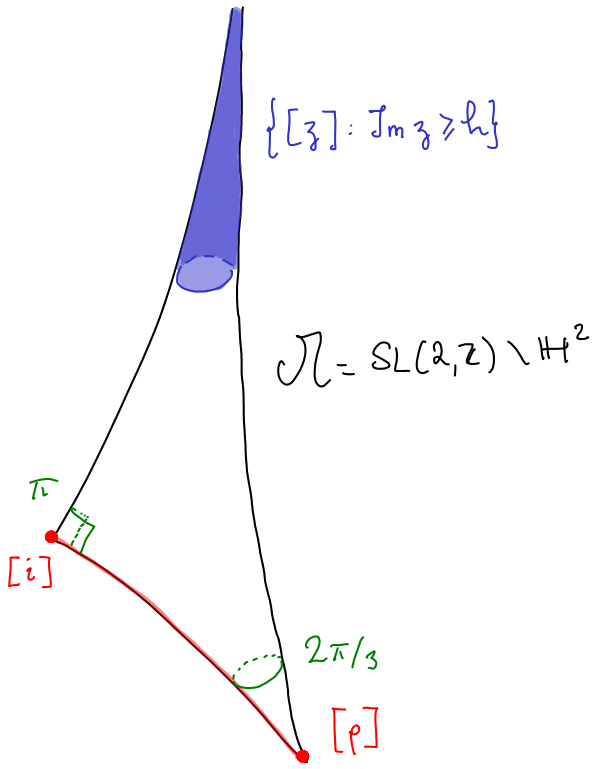


FIGURE 5 – La courbe modulaire avec les projections de l'arbre de Bass-Serre en rouge et du complémentaire du coeur compact en bleu.

manière algébrique : les groupes $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ ou encore $\mathrm{SO}(p,q)$ avec $\min(p,q) \geqslant 1$ et $\mathrm{Sp}(2n,\mathbf{R})$ sont des exemples ; ce sont eux qui porteront le nom de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ dans nos énoncés qui suivent. Ces groupes de matrices sont définis par des équations polynomiales coefficients réels, ils sont donc stables par l'automorphisme $\sigma : g \mapsto {}^t g^{-1}$, qui fixe dans chaque cas un sous groupe *compact* K, qui est $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$ (à indice 2 près si $p = q$) et $\mathrm{SU}(n)$ dans les cas précédents. L'espace symétrique (de type non-compact) est le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{G}(\mathbf{R})/\mathrm{K}$. Il porte une métrique riemannienne invariante (par un argument de moyenne sur compact) ; elle est CAT(0) ; l'automorphisme σ induit une isométrie involutive σ de X ; cette isométrie et ses conjuguées font de X un espace symétrique riemannien. Le *rang réel* de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ ou

le théorème 2.7 et ses analogues ; par exemple, il est possible de montrer à l'aide de [Ger92] que les réseaux uniformes de $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})}$ ont une fonction de remplissage $\mathbf{FV}^2$ qui est quadratique, et non pas linéaire alors que le rang réel est 1.

de X est le plus grand s tel que X contient une copie isométriquement plongée (appelée *plat*) de $\mathbb{E}^s$. Les plats d'un espace symétrique sont totalement géodésiques : ils contiennent tout segment géodésique dont les extremités leur appartiennent. Les espaces symétriques sont homogènes, mais ils ne sont isotropes qu'en rang réel égal à 1 ; le défaut d'isotropie en rang supérieur donne lieu à une riche structure combinatoire qui apparaît notamment sur leurs sphères à l'infini ; cette structure d'*immeuble sphérique* joue un rôle important dans les considérations de plats aléatoires par Leuzinger-Young, mais elle va au-delà de la portée de notre exposé.

La notion de réseau est centrale à cet exposé ; elle est à entendre dans le sens plus général que celui de l'exemple 2.2, que nous donnons à présent. Soit X un espace métrique avec les propriétés prescrites par la Définition 1.4 (par exemple un espace symétrique riemannien, mais selon sa sensibilité, on peut aussi penser à un arbre, à un produits d'arbre, ou à un immeuble de Bruhat-Tits). Par Arzelà-Ascoli le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Isom}(\mathrm{X})$ est localement compact pour la topologie compacte-ouverte. En particulier, il porte une mesure invariante, bien définie à multiple près.

Définition 3.1. Dans le cadre ci-dessus, on appelle réseau de X ou de G tout sous-groupe discret de covolume fini de G.

La définition précédente ne garantit pas que l'action tautologique de Γ sur X soit géométrique, c'est seulement le cas si Γ est co-compact (on dit plutôt uniforme) dans G. Quand Γ est un réseau d'un espace symétrique X, on appelle $\Gamma\backslash\mathrm{X}$ *espace localement symétrique* (pour le différencier de X). L'exemple le plus aisé (bien que du point de vue des invariants de remplissages, il fasse partie des plus difficiles à traiter) est le suivant.

Théorème 3.2 (Minkowski)**.** $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ *est un réseau non uniforme de* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$.

Cela relève de théorème généraux, principalement celui de Borel–Harish-Chandra [Mor15], mais en ce qui concerne $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, on peut le voir de manière élémentaire à ce stade : le domaine fondamental $\mathcal{D}$ est (par le théorème de Gauss-Bonnet) de volume $\pi - \pi/3 - \pi/3 = \pi/3 < +\infty$ pour la forme d'aire associée à la métrique hyperbolique[9] de courbure -1.

On doit à présent définir le coeur compact dans cette généralité. Pour tout $\varepsilon > 0$, notons $X_\varepsilon = \{x \in X : \inf_{\gamma\in\Gamma} d(x, \gamma x) \geqslant \varepsilon\}$. Cet ensemble est Γ-invariant et

$$\Gamma\backslash X = \bigcup_{\varepsilon\downarrow 0} \Gamma\backslash X_\varepsilon.$$

Pour ε assez petit, le complémentaire de $\Gamma\backslash X_\varepsilon$ dans $\Gamma\backslash X$ est une union de voisinages des pointes, et on peut montrer que $\Gamma\backslash X$ se rétracte par déformation sur $\Gamma\backslash X_\varepsilon$. On définit $X_0 := X_{\varepsilon_0}$ pour un tel ε_0 assez petit.

9. À proprement parler nous avons montré que $\mathcal{M} = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ et pas $\mathcal{R} = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ est de volume fini mais en fait, ces deux assertions s'équivalent car $\mathcal{R}$ fibre sur $\mathcal{M}$ avec fibre compacte SO(2) et la mesure se désintègre sur la base.

Remarque 3.3. Dans l'exemple de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ opérant sur $\mathbb{H}^2$, on retrouve bien la construction précédente car (4) donne que $d(z,z+1)$ est une fonction qui dépend seulement de $\Im z$, et $d(z,z+1)\leqslant 1/\Im z$.

La proposition suivante n'est pas difficile.

Proposition 3.4. *Soit* Γ *un réseau dans un espace symétrique de type non compact Le groupe* Γ *agit géométriquement sur le cœur compact* X_0.

Dans toute la suite, il est entendu que G est un $\mathbf{R}$-groupe connexe semisimple et X son espace symétrique. Etant donné Γ un réseau irréductible de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$, si le rang réel de G est au moins 2 alors le théorème d'arithméticité de Margulis dit que sans perte de généralité on peut supposer que G est un $\mathbf{Q}$-groupe [10] et que Γ est *commensurable* (en particulier virtuellement isomorphe) à [11] $\mathrm{G}(\mathbf{Z})$ dans G. Un exemple de réseau arithmétique dans $\mathrm{Sp}(2n,\mathbf{R})$ est $\mathrm{Sp}(2n,\mathbf{Z})$; dans notre autre exemple $\mathrm{SO}(p,q)$, on peut construire des réseaux aux moyens de formes quadratiques entières de signature (p,q).

On a dit qu'un s-plat dans un espace (localement) symétrique est un plongement totalement géodésique de $\mathbf{R}^s$. Les 1-plats sont les géodésiques bi-infinies. Cette notion de plat nous a permis de définir le rang réel de X, et, indirectement de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. Nous allons persister dans cette direction pour définir le *rang rationnel*, mais nous devons signaler que la définition que nous allons donner serait en réalité un théorème dans un exposé plus complet de la théorie.

Définition 3.5 ([Mor15, Chapitre 2])**.** Soit Γ comme ci-dessus et X l'espace symétrique associé à $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. Le $\mathbf{Q}$-rang de Γ est le plus grand des entiers s tels qu'un revêtement fini de $\Gamma\backslash\mathrm{X}$ contient un s-plat.

La notion de $\mathbf{Q}$-rang ci-dessus ferait sens pour les réseaux irréductibles non arithmétiques (pour lesquels il vaudrait 0 ou 1 selon qu'ils sont uniformes ou pas), alors que la « vraie » définition [Mor15, Chapitre 9] n'a pas de sens pour ces derniers.

Exemple 3.6. Le $\mathbf{Q}$-rang de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ est égal à 1 ; la courbe modulaire admet un revêtement à 2 feuillets qui contient une géodésique bi-infinie.

Remarque 3.7. Si Γ est un réseau (arithmétique) de $\mathbf{Q}$-rang q dans $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ de rang réel r, on a toujours $0\leqslant q\leqslant r$, et $q=0$ si et seulement si Γ est uniforme. Ces énoncés découlent relativement directement de la définition 3.5.

Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ est de $\mathbf{Q}$-rang égal à $n-1$, bien que cela ne soit pas aisé à constater pour $n\geqslant 3$ avec notre définition du $\mathbf{Q}$-rang (cela découlerait directement de la vraie définition). En effet il est plus difficile de visualiser les espaces localement

10. Cela changera peut-être G, mais pas $\mathrm{G}(\mathbf{R})$

11. La notion de groupe arithmétique n'est bien définie qu'à commensurabilité près, mais cela ne doit pas nous affecter, car on a vu que les invariants de remplissage, tout comme les propriétés de finitude, sont des invariants d'isomorphisme virtuel.

symétriques de grande dimension et rang que la courbe modulaire, dans laquelle il n'y a essentiellement qu'une seule manière de partir vers l'infini. Nous allons quand même donner quelques mots, deux ou trois mots de tous les jours, au sujet de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ surtout, car c'est important pour nous dans ce texte. La décomposition polaire permet d'identifier l'espace symétrique $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})/\mathrm{SO}(n)$ à l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques définies positives de déterminant 1 ; on admettra que via cette identification, l'ensemble P des matrices diagonales à coefficients positifs et de déterminant 1 forme un plat (pour $n=2$, ceci est sensible : on se convaincra que la matrice $\mathrm{diag}(e^a, e^{1/a})$ correspond à ie^a dans le modèle du demi-plan supérieur). Soient maintenant $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ tel que $a+b+c=0$; nous prétendons que pour tout $g\in\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$,

$$ {}^t g \begin{pmatrix} e^a & & \\ & e^b & \\ & & e^c \end{pmatrix} g $$

est situé loin de $I_3\in\mathcal{S}_3$ dès que $\max(|a|,|b|,|c|)$ est grand. En effet, on peut interpréter $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})\backslash \mathrm{X}$ comme l'ensemble des réseaux de $\mathbf{E}^3$ modulo homothétie, ou encore comme l'ensemble des 3-tores plats de volume 1 modulo isométrie. Les tores ont une grandeur caractéristique qui s'appelle systole, c'est la longueur du plus petit représentant d'une classe d'homotopie libre non triviale ; tendre vers l'infini dans l'espace des tores plats ne peut se faire qu'en faisant tendre la systole vers 0. Puisque $a+b+c=0$, l'un au moins parmi a,b et c est très petit, et le tore [12] $\mathbf{R}^3/\Lambda$ où Λ représente la classe de $\mathrm{diag}(e^a,e^b,e^c)$ dans $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})/\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ a un tout petit rayon d'injectivité et il se situe très loin du tore $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ représenté par I_3.

D'un autre côté, les matrices de permutation qui sont dans $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})\cap\mathrm{SO}(3)$ opèrent sur P en échangeant les 3 coordonnées. Ceci s'interpète de la manière suivante : dans l'espace localement symétrique $\mathcal{N}$ associé à $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$, il est possible de partir vers l'infini dans la direction d'un cône à base circulaire, qui est le quotient de P par les échanges de coordonnées ; c'est un revêtement d'ordre 6 de $\mathcal{N}$ qui contiendra une image de P plongée.

En fait on peut montrer [Mor15] que le $\mathbf{Q}$-rang de Γ est la dimension topologique de l'espace localement symétrique $\Gamma\backslash\mathrm{X}$ « vu depuis l'infini ». Il est possible de donner un sens précis à cette phrase via la notion de cône asymptotique, employée puis popularisée par M. Gromov [Gro93]. Sur la figure on a représenté l'idée qu'on peut se faire de quelques espaces localement symétriques et de leurs cônes asymptotiques. Une compréhension plus fine de l'ensemble des directions dans lesquelles on peut partir à l'infini passe (surtout en $\mathbf{Q}$-rang supérieur) par la compactification des espaces localement symétriques, qui est un sujet difficile et profond [BS73] que nous n'avons pas les moyens d'évoquer plus avant ici.

12. Nous invoquons sans le dire vraiment le critère de Mahler, [Ben09, Proposition 2.5].

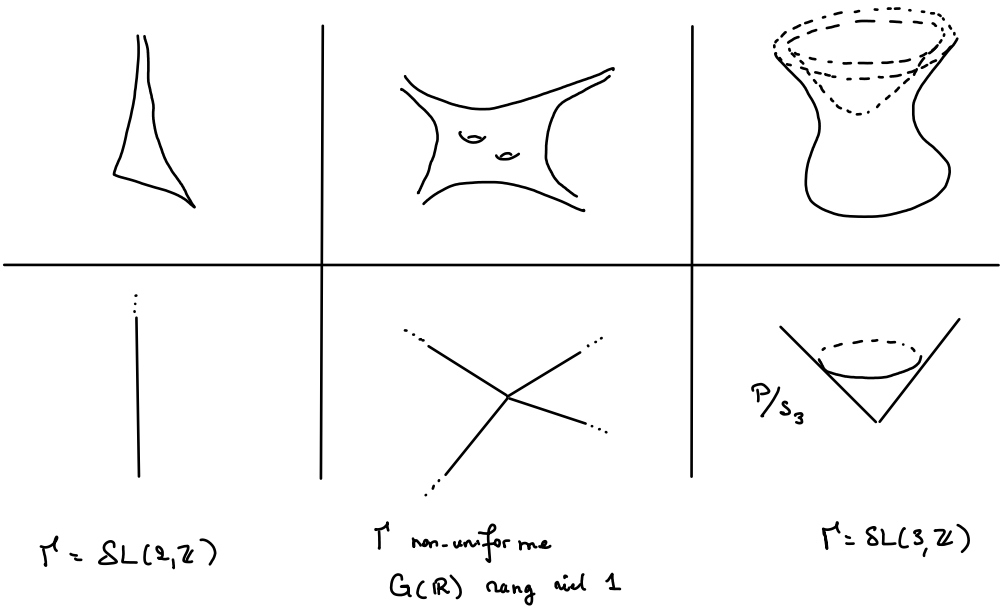


FIGURE 6 – Quelques espaces localement symétriques et leur cônes asymptotiques (dans le cas de $\Gamma = \mathrm{SL}(3, \mathbf{Z})$ l'espace localement symétrique est en réalité de dimension 5).

3.4. **Q-rang petit et distorsion homologique des horosphères.** Le §3.2 a mis en évidence le fait que comprendre le remplissage de Γ revient à comprendre les invariants de remplissage du cœur compact de Γ dans l'espace symétrique. Au §3.3 nous avons rapproché la notion de $\mathbf{Q}$-rang de la dimension maximale des plats contenus dans $\Gamma\backslash X$. Ces plats, une fois relevés dans l'espace symétrique, s'échappent nécessairement [13] du cœur compact. Toutefois, il n'y a pas d'obstruction en principe à ce que le cœur compact contienne des plats, et même en fait des plats maximaux de l'espace symétrique X, et c'est effectivement le cas :

Théorème 3.8 (Mostow, [Mos73, Lemma 8.3])**.** *Le cœur compact de* Γ *contient des plats maximaux de* X*.*

Dans le cas de $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, ceci se manifeste par la présence de géodésiques fermées sur la courbe modulaire (figure 7). En fait il y a beaucoup de telles géodésiques fermées, essentiellement autant que d'irrationnels quadratiques dans $\mathbf{R}$. En général le cœur compact contient beaucoup de plats de dimension maximale.

Nous allons maintenant comparer le remplissage dans l'espace symétrique, dans les plats et dans le cœur compact. Cette comparaison demande d'introduire la notion suivante.

13. À moins que le $\mathbf{Q}$-rang de Γ ne soit nul.

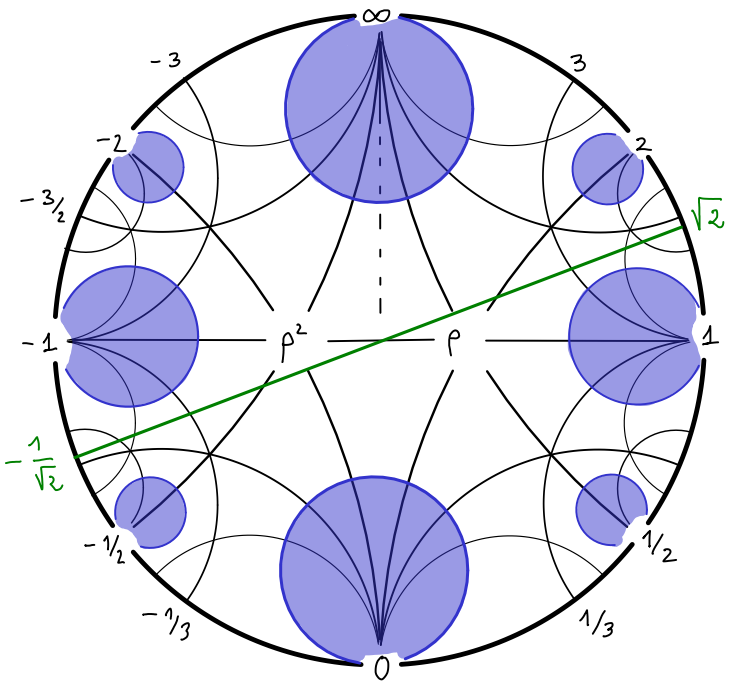


FIGURE 7 – Un plat (ici une géodésique bi-infinie) dans le cœur compact de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$.

Définition 3.9 (Distorsion homologique)**.** Soit $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ une paire d'espaces métriques avec les propriétés données dans la définition 1.4 ; dans le cas simplicial on suppose aussi que Y est un sous-complexe simplicial. Soit $d \in \{1,\dots,n\}$ où $n = \dim \mathrm{Y}$. Soit $c \in \mathrm{C}^{d-1}_{\mathrm{lip}}(\mathrm{Y},\mathbf{Z})$ tel que $\partial c = 0$. On veut comparer les deux quantités

$$\mathrm{FV}^d_{\mathrm{Y}}(c) = \inf\{\mathrm{vol}_d(r)\colon r \in \mathrm{C}^d_{\mathrm{lip}}(\mathrm{Y},\mathbf{Z}),\ \partial r = c\}$$
$$\mathrm{FV}^d_{\mathrm{X}}(c) = \inf\{\mathrm{vol}_d(r)\colon r \in \mathrm{C}^d_{\mathrm{lip}}(\mathrm{X},\mathbf{Z}),\ \partial r = c\}$$

On dit que Y est (homologiquement) d-distordu dans X s'il existe une suite de $(d-1)$-cycles c_k tels que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{FV}^d_{\mathrm{Y}}(c_k)}{\mathrm{FV}^d_{\mathrm{X}}(c_k)} = +\infty. \tag{5}$$

On ne demande pas a priori aux d-cycles c_k ci-dessus d'avoir un volume qui tend vers l'infini. Quand $d = 1$ et les c_k forment une suite de paires de points (signée) $c_k = p_k - q_k$, dans ce cas (5) s'interprète de la manière suivante : la géodésique

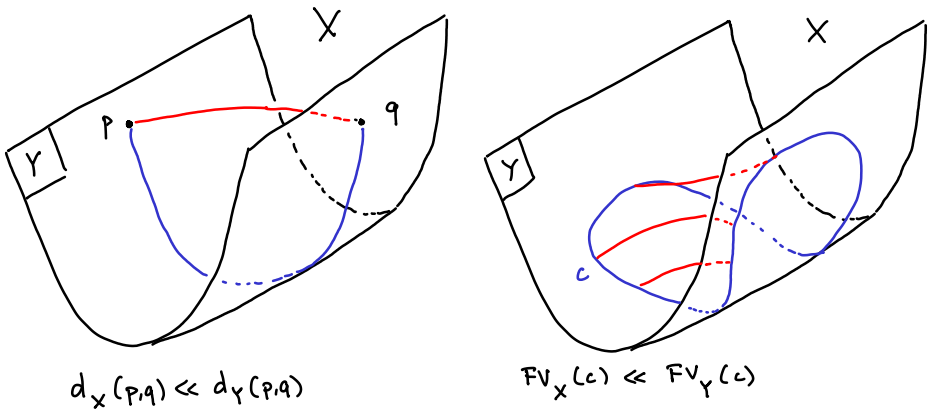


FIGURE 8 – 1– et 2–distorsion.

entre p_k et q_k dans X est beaucoup plus courte que la géodésique entre p_k et q_k dans Y (figure 8).

Exemple 3.10. Le prototype d'espace 1-distordu est l'horocycle du plan hyperbolique. Dans le modèle du demi-plan, un tel horocycle s'identifie à l'orbite

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ & 1 \end{pmatrix} i \colon s \in \mathbf{R} \right\},$$

et un calcul donne que

$$\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & \\ & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci nous dit que $d(i, i + e^t) \leqslant 2t + 1$ alors que $d_H(i, i + e^t) = e^t$. La limite (5) a donc lieu avec $p_k = i$ et $q_k = i + e^k$.

Définition 3.11 (Dimension de distorsion homologique)**.** On définit $\mathrm{disdim}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = 1 + \sup\{d \colon \mathrm{Y}$ n'est pas d-distordu dans $\mathrm{X}\}$ (et par convention, c'est 1 s'il est 1-distordu).

On a dit plus haut que les plats sont totalement géodésiques. La proposition suivante renforce cet énoncé.

Proposition 3.12. *Soit $P \subset \mathrm{X}$ un plat maximal dans un espace symétrique. Alors* $\mathrm{disdim}(P, \mathrm{X}) = +\infty$*, i.e. P est non-distordu en tous degrés.*

Démonstration. Le point clé est que l'espace symétrique tout entier se rétracte sur P, et que cette rétraction est lipschitzienne. On peut déjà constater que c'est vraisemblable sur des exemples. Quand X est le plan hyperbolique, dans le demi-espace, il est très visible que X se rétracte lipschitziennement sur la géodésique verticale $\Re = 0$ d'après l'expression de la métrique (4). Egalement, le produit d'arbres $T_3 \times T_3$ se rétracte sur chacun de ses deux facteurs. Bien que $T_3 \times T_3$ ne soit pas un

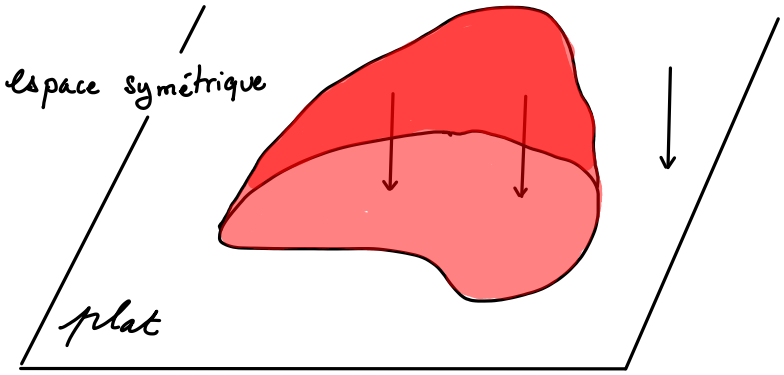


FIGURE 9 – La rétraction lipschitz diminue les volumes de remplissage et empêche la distorsion des plats.

espace symétrique, c'est une bonne appoximation ; dans les immeubles de euclidiens, qui sont les cousins non-archimédiens des espaces symétriques incluant les produits d'arbres, la rétraction sur les appartements est aussi une caractéristique importante. En général, on a besoin du lemme suivant, qui n'est pas très difficile à démontrer.

Lemma 3.13. *Soit Z un sous-ensemble convexe fermé dans un espace CAT(0). Alors la projection sur Z est* 1*-lipschitzienne.*

Cette projection diminue le volume des cycles de remplissage et empêche la distorsion, voir la figure 9. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la borne inférieure du théorème 2.7 de Leuzinger-Young, sauf en degré égal au rang.

Proposition 3.14. *Soit Γ un réseau (uniforme ou pas) dans un espace symétrique de rang r. On a*

$$\mathbf{FV}^d_\Gamma \geqslant v^{\frac{d}{d-1}} \tag{6}$$

pour $d \in \{2, \dots, r\}$.

Démonstration. Le remplissage d'un cycle dans le coeur compact est nécessairement au moins aussi difficile à effectuer dans ce même coeur compact que dans l'espace symétrique ambiant. Par ailleurs, d'après le théorème 3.8, le cœur compact contient des plats maximaux, qui sont non-distordus en tout degré dans l'espace symétrique d'après la proposition 3.12, a fortiori dans le cœur compact. Ceci établit (6). □

On veut maintenant discuter des bornes supérieures. Le cas le plus favorable dans cette direction est celui où le coeur compact est l'espace symétrique tout entier ; quand Γ est arithmétique, cela revient au cas de $\mathbf{Q}$-rang nul.

Théorème 3.15. *Soit k un corps local,* G *un k-groupe algébrique connexe semi-simple de rang r, et* Γ *un réseau uniforme de* $\mathrm{G}(k)$*. Pour tout $d \geqslant 2$,*

$$\mathbf{FV}^d_\Gamma(v) \approx \begin{cases} v & r = 1 \\ v^{\frac{d}{d-1}} & r \geqslant 2 \end{cases}.$$

En spécialisant au cas $k = \mathbf{R}$ on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 3.16. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel de rang égal à r et de centre fini, et* Γ *un réseau uniforme de* G*. Pour tout $d \geqslant 2$,*

$$\mathbf{FV}^d_\Gamma(v) \approx \begin{cases} v & r = 1 \\ v^{\frac{d}{d-1}} & r \geqslant 2 \end{cases}$$

Remarque 3.17. L'hypothèse de centre fini est nécessaire. Il peut arriver que G soit de centre infini quand l'espace symétrique associé est de type hermitien. Dans ce cas $\pi_1(\mathrm{G}(\mathbf{R}))$ est toujours virtuellement isomorphe à $\mathbf{Z}$, et, si Γ est un réseau uniforme de G, il se place au milieu de l'extension centrale

$$1 \to \mathbf{Z} \to \Gamma \to \Gamma_0 \to 1$$

où Γ_0 est virtuellement un réseau uniforme du groupe des points réels d'un $\mathbf{R}$-groupe algébrique semisimple connexe. Par exemple, le groupe fondamental Γ du fibré tangent unitaire d'une surface compacte sans bord est un réseau uniforme dans $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})}$. Dans ce cas, l'extension centrale est quasiisométriquement triviale [Ger92] et Γ a la même fonction de Dehn que $\Gamma_0 \times \mathbf{Z}$, à savoir quadratique, et non linéaire, bien que le rang réel de G soit égal à 1.

Preuve du théorème 3.15. Soit X l'espace symétrique riemannien du groupe de Lie $\mathrm{G}(k)$ si k est archimédien (i.e. $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{G}(k)$ si k est non-archimédien ou de caractéristique positive Mais y a-t-il vraiment des réseaux uniformes dans ce dernier cas ? Dans tous les cas, X est CAT(0) (d'après [Mou88 ; Dav98] pour le cas des immeubles), et Γ opère géométriquement sur X. D'après le théorème 1.2, les invariants de remplissage de Γ sont au plus euclidiens en tout degré. Réciproquement, les plats sont totalement non-distordus dans l'espace symétrique. □

On peut formuler le théorème de Leuzinger et Young comme un calcul de dimension de distorsion. On commence par des cas particuliers, qui sont antérieurs.

Théorème 3.18 (Gromov)**.** *Soit* Γ *un réseau non-uniforme dans un espace symétrique de rang réel* 1*. Les orbites de* Γ *sont 1-distordues dans l'espace symétrique.*

Preuve dans le cas de $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$. Pour voir qu'il est plus facile de rejoindre deux points d'une orbite de $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ dans $\mathbb{H}^2$ que dans son coeur compact, on "zoome" sur une horoboule, voir la figure 10. Vue ainsi, l'horoboule "écrase" l'arbre de Bass-Serre de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ et rend le plus court chemin entre p et q dans l'abre très long comparé à la géodésique de l'espace hyperbolique. □

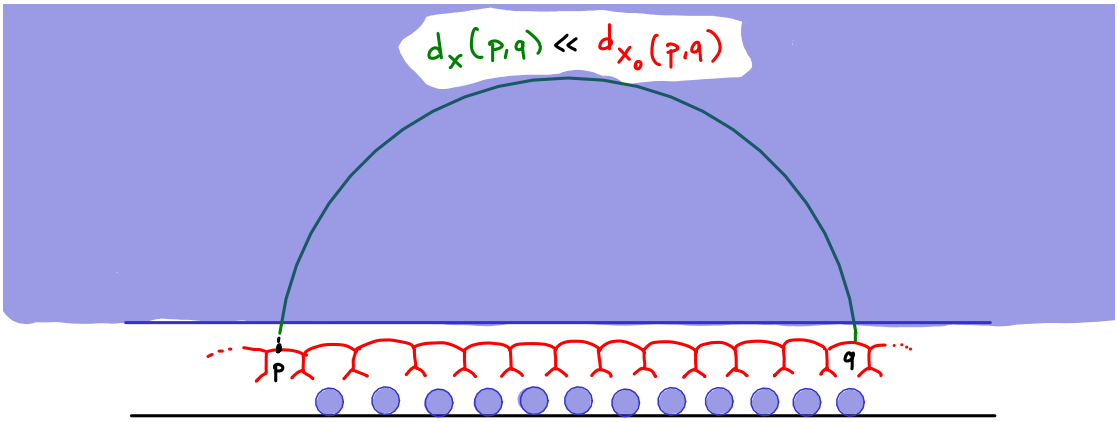


FIGURE 10 – $\mathbf{SL}(d,\mathbf{Z})$ est aussi 1-distordu que les horosphères dans le plan hyperbolique.

Comme on l'a vu, les plats des espaces globalement symétriques ne sont pas du tout distordus. Ce qui est plus surprenant a priori est que les horosphères (régulières) ne le sont pas non en degré plus petit que le rang. Un embryon de ce phénomène peut se trouver dans l'approche de Drutu en $\mathbf{Q}$-rang un et rang réel assez grand du théorème de Lubotzky-Mozes-Raghunathan. Rappelons l'énoncé de celui-ci.

Théorème 3.19 (Lubotzky-Mozes-Raghunathan, [LMR00])**.** *Soit* Γ *un réseau irréductible non-uniforme dans un espace symétrique de rang réel au moins* 2. Γ *n'est pas* 1*-distordu.*

Druţu [Dru97] démontre ce théorème pour Γ de $\mathbf{Q}$-rang un dans un espace symétrique de rang réel au moins 3 (ou bien dans certains immeubles) en se ramenant à la non-distorsion des horosphères en degré 1. (La preuve générale de Lubotzky-Mozes-Raghunathan est plus[14] arithmétique.) C'est en poussant cette approche un degré plus haut que Druţu et Leuzinger-Pittet ont obtenu le remplissage quadratique des réseaux de $\mathbf{Q}$-rang un en degré au moins égal à trois [Dru04 ; LP04].

Théorème 3.20 (Leuzinger & Young)**.** *Soit* Γ *un réseau irréductible dans un espace symétrique* X*. La dimension de distorsion homologique de* Γ *est égale au rang réel.*

Les théorèmes de Gromov d'une part et de Drutu et Lubotzky-Mozes-Raghunathan d'autre part sont des corollaires de ce théorème.

14. Magré tout, dans le cas de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ la preuve (dans ce cas donnée dans [LMR93]) passe par l'étude de $\mathbf{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ qui est un réseau dans le groupe $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ dont l'orbite contient une horosphère quasiisométriquement plongée.

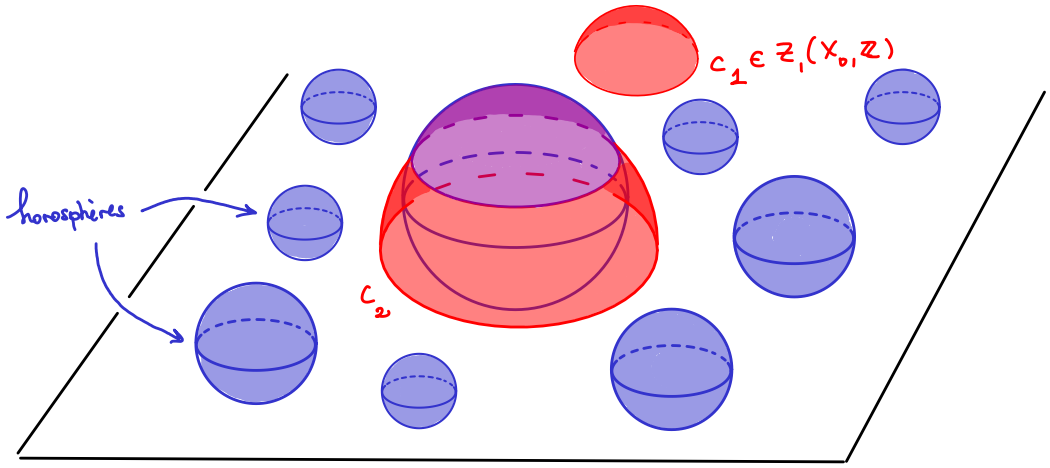


FIGURE 11 – Le remplissage de $c_2 \in Z_1(\mathrm{X}_0, \mathbf{Z})$ est rendu a priori plus difficile dans le cœur compact que dans l'espace symétrique du fait qu'on a retiré des horoboules ; toutefois les horosphères sont homologiquement non-distordues aux degrés sous le rang réel. L'image ci-dessus est fidèle à la réalité pour les réseaux non-uniformes de $\mathbb{H}^3$ et en reste une bonne image mentale tant que Γ est de $\mathbf{Q}$-rang un.

On peut (et on devrait le faire ici, à compléter) travailler avec des exemples concrets : $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)$ où K est un corps de nombres totalement réel de degré 2 ou 3, et voir que la distorsion se ramène à celle dans Sol_3 ou Sol_5 respectivement. Ces horosphères contiennent des 1-plats, resp. des 2-plats de l'espace symétrique.

En $\mathbf{Q}$ rang élevé, les problèmes de distorsion homologique des réseaux et des horosphères cessent d'être directement connectés, parce qu'on ne peut pas disjoindre les horoboules complémentaires au cœur compact et se ramener à la figure 11, mais les résultats sont comparables malgré tout. Le résultat le plus général dans la direction de la distorsion des horoboules est celui de Link [Lin19].

Théorème 3.21. *Soit* X *un produit de* r *espaces CAT(0) simplement connexes localement compacts, et* $\mathcal{H}$ *une horosphère ne contenant aucun des parallèles aux facteurs. Alors* $\mathcal{H}$ *est non distordue jusqu'au rang* $r - 2$.

3.5. **Q-rang élevé et abondance des plats logarithmiques.** Comme on l'a mentionné plus haut, les premiers succès en $\mathbf{Q}$-rang élevé ont été obtenus dans le début des années 2010 par Young et Cohen [You13 ; Coh17] ; malgré toute leur ingéniosité, ils permettaient à l'époque seulement d'évaluer la fonction de Dehn.

La preuve de [LY21] contient une idée qui est très novatrice dans ce contexte, même par rapport à [You13 ; Coh17], à savoir l'usage de la méthode probabiliste.

En bref, Leuzinger et Young renoncent (temporairement) à remplir explicitement les cycles, mais démontrent que le remplissage *en moyenne*, au moyens de chaînes construites à partir de *plats aléatoires* n'est pas trop coûteux. Puisqu'une moyenne est toujours plus grande que la plus petite valeur prise, certains remplissages peu coûteux existent, c'est le yoga de la méthode probabiliste.

La discussion qui va suivre sera plutôt vague : en évitant toute discussion sur la structure combinatoire à l'infini des espaces symétriques, nous ne nous sommes pas vraiment donné les moyens d'expliquer le sens de cette moyenne et la notion de plats aléatoires au sens de Leuzinger-Young ici. Toutefois le texte supportant l'exposé de B. Rémy précise cela [Rem26].

On va se restreindre à décrire quelques idées-clés intervenant dans la borne supérieure aux degrés strictement sous le rang. La difficulté du remplissage en degré égal au rang requiert additionnellement d'autres idées.

Dans l'énoncé suivant, on note $H(s) = \{x \in \Gamma\backslash X : d(x, \Gamma) > s\}$.

Théorème 3.22 (Kleinbock-Margulis [KM98, p. 5.1])**.** *Soit Γ un réseau irréductible non uniforme dans un espace symétrique de dimension n. Alors il existe des constantes $A, C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1 e^{-As} \leqslant \mathrm{vol}_n H(s) \leqslant C_2 e^{-As}. \tag{7}$$

La preuve de Kleinbock et Margulis se fait par dichotomie sur le rang réel. En rang supérieur, elle utilise de manière importante l'arithméticité. Kleinbock et Margulis en disent très peu sur le cas de rang réel un, mais dans ce cas, le résultat est essentiellement dû à Sullivan.

Remarque 3.23. Dans notre exemple-jouet $\mathcal{M} = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})\backslash\mathbb{H}^2$, c'est facile à constater ; un calcul direct donne que la distance entre i et $e^t i$ est égale à t dans le demi-plan supérieur, et le domaine de Dirichlet est de largeur (toujours au sens de la métrique hyperbolique) $\frac{1}{\tau}$ à hauteur τ d'après (4). Quand s est grand l'aire de $H(s) \subseteq \mathcal{M}$ est donc environ $\int_s^{+\infty} \frac{d\tau}{e^\tau} = e^{-s}$.

Conjointement à un théorème d'équirépartition classique (principe d'ergodicité), le théorème 3.22 permet de s'assurer que les plats génériques ne s'écartent pas trop souvent du cœur compact, et (par l'inégalité triangulaire) quand ils le font, ils ne partent pas trop loin. Ceci est d'autant plus utile qu'on a vu qu'en $\mathbf{Q}$-rang élevé, certains plats plongent directement vers les pointes et s'échappent du cœur compact ; ce n'est pas le cas des plats génériques.

Remarque 3.24. Ce comportement générique, et l'exceptionnalité au sens de la mesure des plats qui plongent dans les pointes, sont sensibles dans le cas de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ et ont des interprétations arithmétiques. Le premier correspond au fait que les nombres réels ont une mesure d'irrationnalité presque sûrement égale à 2 (par un argument de type Borel-Cantelli). Le second correspond au fait que les géodésiques qui plongent dans la pointe de la courbe modulaire sont celles qui pointent vers

les *rationnels* de la droite projective réelle. Leur mesure (et même leur dimension de Hausdorff) est nulle.

Ce théorème est utilisé conjointement à un lemme de Leuzinger permettant de contrôler la perte occasionnée par la projection des plats sur le bord du cœur compact, et qui s'exprime vaguement comme suit : la projection est exponentiellement lipschitzienne. Cela signifie qu'elle multiplie les aires par un facteur exponentiel de la distance.

Puisque la plupart des plats s'écartent logarithmiquement du cœur compact, et que la perte occasionnée quand on les projette sur les bords du cœur compact est exponentielle, Leuzinger et Young récupèrent un remplissage qui est polynomial aux degrés sous le rang.

4. Usage par Bader et Sauer

4.1. **Propriété (T) de Kazhdan.** Soit G un groupe topologique localement compact et H un espace de Hilbert. Une représentation unitaire de G dans H est un morphisme $\pi\colon G \to U(H)$, telle que pour tout $v \in H$, l'application $g \mapsto \pi(g)v$ est continue. D. Kazhdan a mis en évidence la propriété suivante en 1967 :

Définition 4.1. Etant donnés une représentation unitaire π de G dans H, $\varepsilon > 0$ et K un compact de G, on dit qu'un vecteur unitaire $v \in H$ est (ε, K)-invariant si pour tout $g \in K$, $\|\pi(g)v - v\| < \varepsilon$. On dit que G a la propriété (T) si toute représentation unitaire possédant des vecteurs (ε, K)-invariants pour tous (ε, K) possède des vecteurs invariants (non-nuls).

Théorème 4.2 (Delorme-Guichardet)**.** *G a la propriété (T) si et seulement si, pour toute représentation unitaire π de G, $H^1_c(G, \pi) = 0$.*

Définition 4.3. Soit $n \geqslant 1$. Un groupe tolopologique localement compact G a la propriété $[T_n]$ si

Remerciements. Je remercie Antonio López Neumann pour m'avoir expliqué les applications à la cohomologie polynomiale.

Références

[Abr+13] Aaron Abrams et al. « Homological and homotopical Dehn functions are different ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 110.48 (2013), p. 19206-19212. ISSN : 0027-8424,1091-6490. DOI : 10.1073/pnas.1207377110. URL : https://doi.org/10.1073/pnas.1207377110.

[AK00] Luigi Ambrosio et Bernd Kirchheim. « Currents in metric spaces ». In : *Acta Math.* 185.1 (2000), p. 1-80. ISSN : 0001-5962,1871-2509. DOI : 10.1007/BF02392711. URL : https://doi.org/10.1007/BF02392711.

[AWP99] J. M. Alonso, X. Wang et S. J. Pride. « Higher-dimensional isoperimetric (or Dehn) functions of groups ». English. In : *J. Group Theory* 2.1 (1999), p. 81-112. ISSN : 1433-5883. DOI : 10.1515/jgth.1999.008.

[Ben09] Yves Benoist. « Five lectures on lattices in semisimple Lie groups ». English. In : *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2009, p. 117-176. ISBN : 978-2-85629-240-2.

[BH99] Martin R. Bridson et André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. T. 319. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999, p. xxii+643. ISBN : 3-540-64324-9. DOI : 10.1007/978-3-662-12494-9. URL : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1007/978-3-662-12494-9.

[BKV25] Shaked Bader, Robert Kropholler et Vladimir Vankov. « Subgroups of word hyperbolic groups in dimension 2 over arbitrary rings ». English. In : *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* 112.1 (2025). Id/No e70230, p. 23. ISSN : 0024-6107. DOI : 10.1112/jlms.70230.

[BMW10] Kai-Uwe Bux, Amir Mohammadi et Kevin Wortman. « $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[t])$ is not FP_{n-1} ». In : *Comment. Math. Helv.* 85.1 (2010), p. 151-164. ISSN : 0010-2571,1420-8946. DOI : 10.4171/CMH/191. URL : https://doi.org/10.4171/CMH/191.

[Bri02] Martin R. Bridson. « The geometry of the word problem ». In : *Invitations to geometry and topology*. T. 7. Oxf. Grad. Texts Math. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002, p. 29-91. ISBN : 0-19-850772-0.

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*. English. T. 87. Grad. Texts Math. Springer, Cham, 1982.

[BS26] Uri Bader et Roman Sauer. *Higher property T and below-rank phenomena of lattices*. 2026. arXiv : 2511.20192 [math.GR]. URL : https://arxiv.org/abs/2511.20192.

[BS73] Armand Borel et Jean-Pierre Serre. « Corners and arithmetic groups (Appendice : Arrondissement des varietes a coins par A. Douady et L. Herault) ». English. In : *Comment. Math. Helv.* 48 (1973), p. 436-491. ISSN : 0010-2571. DOI : 10.1007/BF02566134. URL : https://eudml.org/doc/139559.

[BW07] Kai-Uwe Bux et Kevin Wortman. « Finiteness properties of arithmetic groups over function fields ». In : *Invent. Math.* 167.2 (2007), p. 355-378. ISSN : 0020-9910,1432-1297. DOI : 10.1007/s00222-006-0017-y. URL : https://doi.org/10.1007/s00222-006-0017-y.

[Coh17] David Bruce Cohen. « A Dehn function for $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z})$ ». In : *J. Topol. Anal.* 9.2 (2017), p. 225-290. ISSN : 1793-5253,1793-7167. DOI : 10.1142/S1793525317500121. URL : https://doi.org/10.1142/S1793525317500121.

[Dav98] Michael W. Davis. « Buildings are CAT(0) ». In : *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*. T. 252. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 108-123. ISBN : 0-521-63556-X. DOI : 10.1017/CBO9780511666131.009. URL : https://doi.org/10.1017/CBO9780511666131.009.

[Deh11] M. Dehn. « Über unendliche diskontinuierliche Gruppen ». In : *Math. Ann.* 71.1 (1911), p. 116-144. ISSN : 0025-5831,1432-1807. DOI : 10.1007/BF01456932. URL : https://doi.org/10.1007/BF01456932.

[Dru04] Cornelia Druţu. « Filling in solvable groups and in lattices in semisimple groups ». In : *Topology* 43.5 (2004), p. 983-1033. ISSN : 0040-9383. DOI : 10.1016/j.top.2003.11.004. URL : https://doi.org/10.1016/j.top.2003.11.004.

[Dru97] C. Druţu. « Nondistortion of horospheres in Euclidean buildings and in symmetric spaces ». French. In : *Geom. Funct. Anal.* 7.4 (1997), p. 712-754. ISSN : 1016-443X. DOI : 10.1007/s000390050024.

[Ebe96] Patrick B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996, p. vii+449. ISBN : 0-226-18197-9 ; 0-226-18198-7.

[Eps+92] David B. A. Epstein et al. *Word processing in groups*. Jones et Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992, p. xii+330. ISBN : 0-86720-244-0.

[FF60] Herbert Federer et Wendell H. Fleming. « Normal and integral currents ». In : *Ann. of Math. (2)* 72 (1960), p. 458-520. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.2307/1970227. URL : https://doi.org/10.2307/1970227.

[Ger92] S. M. Gersten. « Bounded cocycles and combings of groups ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 2.3 (1992), p. 307-326. ISSN : 0218-1967,1793-6500. DOI : 10.1142/S0218196792000190. URL : https://doi.org/10.1142/S0218196792000190.

[Ger93] Steve M. Gersten. « Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations ». In : *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*. T. 181. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 79-96. ISBN : 0-521-43529-3. DOI : 10.1017/CBO9780511661860.008. URL : https://doi.org/10.1017/CBO9780511661860.008.

[Gro87] Mikhael L. Gromov. « Hyperbolic groups ». In : *Essays in group theory*. T. 8. Math. Sci. Res. Inst. Publ. Springer, New York, 1987, p. 75-263. DOI : 10.1007/978-1-4613-9586-7_3. URL : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1007/978-1-4613-9586-7_3.

[Gro93] Mikhael L. Gromov. « Asymptotic invariants of infinite groups ». In : *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. T. 182. London Math.

Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1-295.

[Gui25] Olivier GUICHARD. « Exotic subgroups of hyperbolic groups ». English. In : *Séminaire Bourbaki. Volume 2023/2024. Exposés 1211–1226.* Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2025, p. 303-317. ISBN : 978-2-37905-206-4. DOI : 10.24033/ast.1233.

[Kle83] Felix KLEIN. « Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie ». In : *Math. Ann.* 21.2 (1883), p. 141-218. ISSN : 0025-5831,1432-1807. DOI : 10.1007/BF01442920. URL : https://doi.org/10.1007/BF01442920.

[KM98] D. Y. KLEINBOCK et G. A. MARGULIS. « Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds ». In : *Ann. of Math. (2)* 148.1 (1998), p. 339-360. ISSN : 0003-486X,1939-8980. DOI : 10.2307/120997. URL : https://doi.org/10.2307/120997.

[KM99] Sava KRSTIĆ et James MCCOOL. « Presenting $\mathrm{GL}_n(k\langle T\rangle)$ ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 141.2 (1999), p. 175-183. ISSN : 0022-4049,1873-1376. DOI : 10.1016/S0022-4049(98)00022-X. URL : https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00022-X.

[Lin19] Gabriele LINK. « Higher order Dehn functions for horospheres in products of Hadamard spaces ». English. In : *Adv. Geom.* 19.1 (2019), p. 15-20. ISSN : 1615-715X. DOI : 10.1515/advgeom-2017-0042.

[LM22] Xingzhe LI et Fedor MANIN. « Homological filling functions with coefficients ». English. In : *Groups Geom. Dyn.* 16.3 (2022), p. 889-907. ISSN : 1661-7207. DOI : 10.4171/GGD/675.

[LMR00] Alexander LUBOTZKY, Shahar MOZES et M. S. RAGHUNATHAN. « The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups ». English. In : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 91 (2000), p. 5-53. ISSN : 0073-8301. DOI : 10.1007/BF02698740. URL : https://eudml.org/doc/104167.

[LMR93] Alexander LUBOTZKY, Shahar MOZES et M. S. RAGHUNATHAN. « Cyclic subgroups of exponential growth and metrics on discrete groups ». English. In : *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* 317.8 (1993), p. 735-740. ISSN : 0764-4442.

[LP04] E. LEUZINGER et Ch. PITTET. « On quadratic Dehn functions ». In : *Math. Z.* 248.4 (2004), p. 725-755. ISSN : 0025-5874,1432-1823. DOI : 10.1007/s00209-004-0678-4. URL : https://doi.org/10.1007/s00209-004-0678-4.

[LP25] Antonio LÓPEZ NEUMANN et Juan PAUCAR. *Quantitative polynomial cohomology and applications to L^p-measure equivalence.* 2025. arXiv : 2512.18463 [math.GR]. URL : https://arxiv.org/abs/2512.18463.

[LP96] E. LEUZINGER et C. PITTET. « Isoperimetric inequalities for lattices in semisimple Lie groups of rank 2 ». In : *Geom. Funct. Anal.* 6.3 (1996),

p. 489-511. ISSN : 1016-443X,1420-8970. DOI : 10.1007/BF02249261. URL : https://doi.org/10.1007/BF02249261.

[LY17] Enrico LEUZINGER et Robert YOUNG. « The distortion dimension of $\mathbb{Q}$-rank 1 lattices ». In : *Geom. Dedicata* 187 (2017), p. 69-87. ISSN : 0046-5755,1572-9168. DOI : 10.1007/s10711-016-0189-6. URL : https://doi.org/10.1007/s10711-016-0189-6.

[LY21] Enrico LEUZINGER et Robert YOUNG. « Filling functions of arithmetic groups ». In : *Ann. of Math. (2)* 193.3 (2021), p. 733-792. ISSN : 0003-486X,1939-8980. DOI : 10.4007/annals.2021.193.3.2. URL : https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.3.2.

[Mes19] Arnaud de MESMAY. « Nœuds, mouvements de Reidemeister et algorithms [d'après Lackenby] ». In : 407. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135. 2019, Exp. No. 1121, 27-52. ISBN : 978-2-85629-897-8. DOI : 10.24033/ast. URL : https://doi.org/10.24033/ast.

[Mor15] Dave Witte MORRIS. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, [place of publication not identified], 2015, p. xii+475. ISBN : 978-0-9865716-0-2 ; 978-0-9865716-1-9.

[Mos73] G. D. MOSTOW. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. T. No. 78. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973, p. v+195.

[Mou88] Gabor MOUSSONG. *Hyperbolic Coxeter groups*. Thesis (Ph.D.)–The Ohio State University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1988, p. 55. URL : http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:8824577.

[Nag59] Hirosi NAGAO. « On GL(2, $K[x]$) ». In : *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A* 10 (1959), p. 117-121. ISSN : 0388-0516.

[Pan25] Pierre PANSU. *Théorie de l'homotopie quantitative*. 2025. arXiv : 2503.20335 [math.AT]. URL : https://arxiv.org/abs/2503.20335.

[Rem26] Bertrand R'EMY. *Annulations en cohomologie unitaire et théorie géométrique des groupes*. 2026.

[Ser73] J.-P. SERRE. *A course in arithmetic*. T. No. 7. Graduate Texts in Mathematics. Translated from the French. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, p. viii+115.

[Ser77] Jean-Pierre SERRE. *Arbres, amalgames,* SL_2. Astérisque, No. 46. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Société Mathématique de France, Paris, 1977, 189 pp. (1 plate).

[Wei26a] A. WEIL. « Sur les surfaces à courbure négative. » French. In : *C. R. Acad. Sci., Paris* 182 (1926), p. 1069-1071. ISSN : 0001-4036.

[Wei26b] Jannis WEIS. *Quasi-isometry Invariance of discrete Higher Filling functions*. 2026. arXiv : 2601.15140 [math.GR]. URL : https://arxiv.org/abs/2601.15140.

[Wen05] S. Wenger. « Isoperimetric inequalities of Euclidean type in metric spaces ». In : *Geom. Funct. Anal.* 15.2 (2005), p. 534-554. ISSN : 1016-443X,1420-8970. DOI : 10.1007/s00039-005-0515-x. URL : https://doi.org/10.1007/s00039-005-0515-x.

[You11] Robert Young. « Homological and homotopical higher-order filling functions. » English. In : *Groups Geom. Dyn.* 5.3 (2011), p. 683-690. ISSN : 1661-7207. DOI : 10.4171/GGD/144.

[You13] Robert Young. « The Dehn function of $\mathrm{SL}(n;\mathbb{Z})$ ». In : *Ann. of Math. (2)* 177.3 (2013), p. 969-1027. ISSN : 0003-486X,1939-8980. DOI : 10.4007/annals.2013.177.3.4. URL : https://doi.org/10.4007/annals.2013.177.3.4.

[You16] Robert Young. « High-dimensional fillings in Heisenberg groups ». In : *J. Geom. Anal.* 26.2 (2016), p. 1596-1616. ISSN : 1050-6926,1559-002X. DOI : 10.1007/s12220-015-9601-y. URL : https://doi.org/10.1007/s12220-015-9601-y.